ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

# İMPULSİVE SCHRÖDİNGER OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ANALİZİ

Şeyda SOLMAZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2016

## TEZ ONAYI

Şeyda SOLMAZ tarafından hazırlanan " **İmpulsive Schrödinger Operatörünün Spektral Analizi** " adlı tez çalışması 11/01/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman:** Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

**Jüri Üyeleri:**

**Başkan:** Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

**Üye :** Prof. Dr. Elgiz BAYRAM
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

**Üye :** Doç. Dr. Esra KIR ARPAT
Gazi Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

**Yukarıdaki sonucu onaylarım**

**Prof. Dr. İbrahim DEMİR**
**Enstitü Müdürü**

# ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

11/01/2016

Şeyda SOLMAZ

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İMPULSİVE SCHRÖDİNGER OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ANALİZİ

Şeyda SOLMAZ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde çalışmamızla ilgili temel kavram ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde geçiş matrisi yardımıyla tanımlanan genel nokta etkileşiminin spektral singülerliği ve özdeğerleri araştırılmıştır.

Dördüncü bölümde, geçiş matrisi yardımıyla tanımlanan genel nokta etkileşiminin P-, T- ve PT-simetrik olması durumunda geçiş matrisi bileşenlerinin hangi koşulları sağlaması gerektiği incelenmiştir.

Beşinci bölümde, yansıma ve geçiş sabitlerinin sıfır genliğe sahip rezonanslara karşılık geldikleri kompleks saçılım potansiyelinin spektral singülerlikleri verilmiştir. Ayrıca, PT-simetrik kompleks bariyer potansiyelinin spektral singülerlikleri incelenmiştir.

Son bölümde ise elde edilen sonuçların analizi yapılmıştır.



**Ocak 2016, 38 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Spektral Analiz, İmpulsive Schrödinger Operatörü, Spektral Singülerlikler, Özdeğerler.

# ABSTRACT

Master Thesis

SPECTRAL ANALYSIS OF IMPULSIVE SCHRODINGER OPERATOR

Şeyda SOLMAZ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

This thesis consists of six chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some basic concepts and theorems related to this study are given.

In the third chapter, spectral singularities and eigenvalues of the general point interaction identified with the help of transition matrix are investigated.

In the fourth chapter, it is studied if the general point interaction identified with the help of transition matrix is P-, T- ve PT-symmetric, it is explored conditions that components of the transition matrix provided.

In the fifth chapter, spectral singularities of complex scattering potentials at which the reflection and transmission coefficients tend to infinity, i.e, they correspond to resonances having a zero width are given. In addition, the spectral singularities of an imaginary PT-symmetric barrier potential are explored.

Finally, the last chapter is devoted to the analysis of the results obtained.

**January 2016, 38 pages**

**Key Words:** Spectral Analysis, Impulsive Schrödinger Operator, Spectral Singularities, Eigenvalues.

**TEŞEKKÜR**

Bu çalışma konusunu bana veren, araştırmalarımın her aşamasında engin bilgileriyle beni yönlendiren ve matematiksel düşünme yeteneğimi geliştirmeme yardımcı olan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Elgiz BAYRAM'a (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), haftalık seminerlerimiz boyunca benimle birlikte olan değerli hocalarım ve çalışma arkadaşlarım Yrd. Doç. Dr. Yelda AYGAR KÜÇÜKEVCİ - LİOĞLU, Dr. Ekin UĞURLU, Arş. Gör. Dr. Emre TAŞ (Ahi Evran Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), Arş. Gör. Dr. Tuğba YURDAKADİM (Hitit Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), Ş. Nur CEBESOY, İbrahim ERDAL ile Emel YILDIRIM'a ve ayrıca hayatım boyunca yanımda olduğu gibi çalışmalarım süresince de fedakarlıklar göstererek beni her zaman destekleyen tüm dostlarım ve sevgili aileme teşekkür ederim.

Şeyda SOLMAZ
Ankara, Ocak 2016

İÇİNDEKİLER

# SİMGELER DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $\mathbb{R}$ | Reel sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}^-$ | Negatif sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}^+$ | Pozitif sayılar kümesi |
| $\mathbb{C}$ | Kompleks sayılar kümesi |
| $\overline{\mathbb{C}}_+$ | Kapalı üst-yarı düzlem |
| $\overline{\mathbb{C}}_-$ | Kapalı alt-yarı düzlem |
| $H$ | Schrödinger operatörü |
| $\dfrac{\partial}{\partial x}$ | Türev operatörü |
| $\psi^*$ | $\psi$ operatörünün kompleks eşleniği |
| $D(\psi)$ | $\psi$ operatörünün tanım kümesi |
| $R(\psi)$ | $\psi$ operatörünün görüntü kümesi |
| $B^*$ | $B$ matrisinin kompleks eşleneği |
| $B^{-1}$ | $B$ matrisinin tersi |
| $\mathrm{Im}(k)$ | $k$ sayısının imajiner kısmı |
| $\mathrm{Re}(k)$ | $k$ sayısının reel kısmı |

# 1. GİRİŞ

Spektral singülerlikler non-selfadjoint Schrödinger operatörlerinin özfonksiyonlarının tamlığını bozan spektral noktalardır. Reel spektrumlu PT-simetrik kompleks potansiyeller 2002 yılında Mostafazadeh tarafından üniter kuantum sistemlerini tanımlamak için kullanılmış olup böyle potansiyellerde spektrumun reelliğinin PT-simetrinin varlığını sağladığı gösterilmiştir. Bu tezde ise verilen bir nokta etkileşimi için P-simetri, T-simetri ya da PT-simetri olması durumunda spektral singülerlik ve özdeğerleri bulma problemi incelenmiştir. Ayrıca, Mostafazadeh'in 2009 tarihli "Spectral Singularities of Complex Scattering Potentials and Infinite Reflection and Transmission Coefficients at Real Energies" ve 2011 tarihli "Spectral singularities of a general point interaction" makaleleri esas alınmış olup makalelerin matematiksel kısımları ayrıntılı olarak verilmiştir.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

**Tanım 2.1** $X$ boştan farklı bir küme olmak üzere, her bir $x$, $y$, $z \in X$ ve $\mu$ ile $\lambda$ skalerleri için

1. $x, y \in X \Rightarrow x + y \in X$
2. $x + y = y + x$
3. $(x + y) + z = x + (y + z)$
4. Her bir $x \in X$ için $x + 0 = x$ olacak şekilde $0 \in X$ vardır.
5. $x \in X \Rightarrow \lambda \cdot x \in X$
6. $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = \lambda \cdot \mu \cdot x$
7. Her bir $x \in X$ için $1 \cdot x = x$ olacak şekilde $1 \in X$ vardır
8. Her bir $x \in X$ için $0 \cdot x = 0$ olacak şekilde $0 \in X$ vardır
9. $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
10. $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$

şeklinde inşa edilebilen $(X, +, \cdot)$ üçlüsüne vektör uzayı denir. Eğer $X$ vektör uzayının cismi, $\mathbb{R}$ ise $X$ e reel vektör uzayı; $\mathbb{C}$ ise de kompleks vektör uzayı adı verilir (Naimark 1968).

**Tanım 2.2** $T : D(T) \longrightarrow Y$ operatörü için

$$T|_B : B \longrightarrow Y \quad , \quad T|_B = Tx \quad , \quad \forall x \in B$$

şeklinde tanımlı $T|_B$ operatörüne $T$ operatörünün $B \subset D(T)$ altkümesine kısıtlaması denir (Kreyszig 1978).

**Tanım 2.3** Tanım ve görüntü kümesi aynı cisim üzerinde birer vektör uzayı olan bir $L$ dönüşümü, tanım kümesindeki her bir $x$, $y$ elemanı ve cisimdeki her $\alpha$ skaleri için

1. $L(x+y) = Lx + Ly$
2. $L(\alpha x) = \alpha Lx$

koşullarını sağlıyorsa, $L$ dönüşümüne tanım kümesi $D(L)$ olan lineer operatör denir (Naimark 1968).

**Tanım 2.4** $X$ reel veya kompleks bir vektör uzayı olmak üzere, her bir $x$, $y \in X$ ve $\lambda$ skaleri için

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
4. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerini sağlayan $\|\cdot\|$ fonksiyonuna $X$ üzerinde bir norm denir. Üzerinde norm tanımlanan $X$ vektör uzayına ise normlu uzay adı verilir (Naimark 1968).

**Tanım 2.5** $X$ reel veya kompleks bir vektör uzayı olmak üzere, her $x$, $x_1$, $x_2$, $y \in X$ ve $\lambda$ bir skaleri için

1. $(x,x) \geq 0$

   $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $(x,y) = \overline{(y,x)}$
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$
4. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$

özelliklerini sağlayan $(\cdot,\cdot)$ fonksiyonuna $X$ üzerinde bir iç çarpım denir. Böyle bir iç çarpımla donatılan $X$ uzayına ise iç çarpım uzayı adı verilir (Naimark 1968).

# 3. İMPULSİVE SCHRÖDİNGER DENKLEMİ

$\psi$, zamandan bağımsız

$$-\psi''(x) = k^2\psi(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+ \tag{3.1}$$

Schrödinger denkleminin bir çözümü ve de $\psi(x^-)$ ile $\psi(x^+)$ sırasıyla $\psi$ çözümünün $\mathbb{R}^-$ ile $\mathbb{R}^+$ kümelerine kısıtlamaları olup

$$\begin{cases} \psi(x^-) := \psi(x) \quad , \quad x < 0 \\ \psi(x^+) := \psi(x) \quad , \quad x > 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlansınlar. Ayrıca

$$\begin{cases} \psi(0^-) := \lim\limits_{\epsilon \to 0^-} \psi(\epsilon) \\ \psi(0^+) := \lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \psi(\epsilon) \end{cases} \tag{3.3}$$

olmak üzere iki bileşenli $\Psi := \begin{pmatrix} \psi \\ \psi' \end{pmatrix}$ dalgafonksiyonu

$$\begin{cases} \Psi(x^-) := \begin{pmatrix} \psi(x^-) \\ \psi'(x^-) \end{pmatrix} \quad , \quad x \leqslant 0 \\ \Psi(x^+) := \begin{pmatrix} \psi(x^+) \\ \psi'(x^+) \end{pmatrix} \quad , \quad x \geqslant 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlansın.

**Tanım 3.1** $\Psi$, (3.4) ile tanımlı dalgafonksiyonu olmak üzere

$$\Psi(0^+) = B\Psi(0^-) \quad , \quad B = \begin{pmatrix} a & , & b \\ c & , & d \end{pmatrix} \quad , \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \tag{3.5}$$

koşulu yardımıyla verilen bağıntıya $x = 0$ noktasındaki nokta etkileşimi; $x = 0$ noktasına etkileşim noktası ve $B$ matrisine de (3.1) denkleminin negatif reel eksen üzerindeki çözümünün pozitif reel eksen üzerine devam ettirilmesinde kullanılan geçiş matrisi denir (Mostafazadeh 2011).

Parçalı sürekli bir saçılım potansiyelinin geçiş matrisinin birim determinanta sahip olduğu A. Mostafazedeh tarafından 2009 yılında gösterilmiştir. Dolayısıyla

$$\det B = ad - bc = 1 \tag{3.6}$$

eşitliğinin sağlandığı açıktır.

**Tanım 3.2** $B$ geçiş matrisi için $\det B \neq 1$ koşulunu sağlayan nokta etkileşimlerine aykırı nokta etkileşimi (anomalous point interactions) denir (Mostafazadeh 2011).

**Tanım 3.3** $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere, her bir $x \in \mathbb{R}$ değeri için

$$(P\varphi)(x) := \varphi(-x) \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlı $P$ operatötüne parity operatörü denir (Mostafazadeh 2011).

**Tanım 3.4** $\varphi^*$, $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunun kompleks eşleniği olmak üzere, her bir $x \in \mathbb{R}$ değeri için

$$(T\varphi)(x) := \varphi(x)^* \tag{3.8}$$

şeklinde tanımlı $T$ operatörüne time-reversal operatörü denir (Mostafazadeh 2011).

(3.5) ile tanımlanan nokta etkileşimi $B$ geçiş matrisinin $a, b, c$ ve $d$ bileşenlerinin seçimine bağlı olarak P-simetri, T-simetri ya da PT-simetriye sahip olabilir.

**Tanım 3.5** (3.5) bağıntısı yardımıyla verilen nokta etkileşimi için

$$(P\Psi)(0^+) = B(P\Psi)(0^-) \tag{3.9}$$

koşulunun sağlanması durumunda etkileşim P-simetriktir denir (Mostafazadeh 2011).

**Tanım 3.6** (3.5) bağıntısı yardımıyla verilen nokta etkileşimi için

$$(T\Psi)(0^+) = B(T\Psi)(0^-) \tag{3.10}$$

koşulunun sağlanması durumunda etkileşim T-simetriktir denir (Mostafazadeh 2011).

**Tanım 3.7** (3.5) bağıntısı yardımıyla verilen nokta etkileşimi için

$$(PT\Psi)(0^+) = B(PT\Psi)(0^-) \tag{3.11}$$

koşulunun sağlanması durumunda etkileşim PT-simetriktir denir (Mostafazadeh 2011).

**Tanım 3.8** $\nu$, $L^2(-\infty,\infty)$ uzayında

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|x|)\,|\nu(x)|\,dx < \infty$$

koşulunu sağlayan kompleks değerli bir fonksiyon ve $H$, $H := -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\nu(x)$ ile tanımlı Schrödinger operatörü olmak üzere

$$H\psi(x) = k^2\psi(x) \tag{3.12}$$

özdeğer denklemi ve

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} y(x,k)e^{ikx} = 1 \quad , \quad k \in \overline{\mathbb{C}}_-$$
$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} y(x,k)e^{-ikx} = 1 \quad , \quad k \in \overline{\mathbb{C}}_+$$

koşullarıyla verilen sınır değer probleminin çözümlerine (3.12) denkleminin Jost çözümleri denir ve bu çözümler, sırasıyla

$$e^+(k,x) = e^{ikx} + \int_x^{\infty} \frac{\sin k(t-x)}{k}\nu(t)e^{ikx}dt \tag{3.13}$$

$$e^-(k,x) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^{x} \frac{\sin k(x-t)}{k}\nu(t)e^{-ikx}dt \tag{3.14}$$

şeklinde verilir (Marchenko 1986).

Reel eksen üzerinde tanımlı Schrödinger operatörü için spektral singülerlik kavramının birbirine denk olan birkaç tane tanımı vardır. Bu çalışmada (3.12) ile bilinen özdeğer denkleminin

$$\begin{cases} \psi_{k_+}(x) \to e^{ikx} & , \quad x \to +\infty \\ \psi_{k_-}(x) \to e^{-ikx} & , \quad x \to -\infty \end{cases} \tag{3.15}$$

asimptotik sınır koşullarını gerçekleyen $\psi_{k_+}$ ile $\psi_{k_-}$ Jost çözümleri yardımıyla yapılan tanımdan faydalanılacaktır.

**Tanım 3.9** $\nu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|) \, |\nu(x)| \, dx < \infty$$

koşulunu gerçekleyen bir fonksiyon olsun. (3.12) dekleminin (3.15) asimptotik sınır koşulları ile verilen Jost çözümlerini lineer bağımlı yapan $k \in \mathbb{R}$ için $k^2 \in \mathbb{R}^+$ sayısına $H$ operatörünün spektral singülerliği denir (Naimark 1968).

**Tanım 3.10** Bir Hilbert uzayı üzerinde tanımlı $L$ operatörünün $D(L)$ tanım kümesinde

$$Ly = \lambda y$$

denkleminin özdeş olarak sıfırdan farklı bir $y$ çözümü mevcut ise $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına L operatörünün bir özdeğeri; $y \neq 0$ çözümüne de $L$ operatörünün $\lambda$ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon denir (Naimark 1968).

## 3.1 Spektral Singülerlik ve Özdeğerler

(3.1) denkleminin lineer bağımsız iki çözümü $e^{ikx}$ ile $e^{-ikx}$ olduğundan genel çözüm

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad , \quad x \in \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+ \tag{3.16}$$

ile verilir. (3.16) çözümünü (3.2) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \psi(x^-) &= A_- e^{ikx} + B_- e^{-ikx} \quad , \quad x < 0 \\ \psi(x^+) &= A_+ e^{ikx} + B_+ e^{-ikx} \quad , \quad x > 0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

şeklinde de ifade etmek mümkündür.

$x = 0$ noktasındaki nokta etkileşiminden yararlanılarak

$$\begin{aligned} \Psi(0^+) = B\Psi(0^-) \quad &\Rightarrow \begin{pmatrix} \psi(0^+) \\ \psi'(0^+) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \psi(0^-) \\ \psi'(0^-) \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} A_+ + B_+ \\ ikA_+ - ikB_+ \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} A_- + B_- \\ ikA_- - ikB_- \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & , & 1 \\ ik & , & -ik \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_+ \\ B_+ \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 & , & 1 \\ ik & , & -ik \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_- \\ B_- \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Burada $N := \begin{pmatrix} 1 & , & 1 \\ ik & , & -ik \end{pmatrix}$ olmak üzere, $Nx = 0$ denkleminin sadece $x = 0$ aşikar çözümü olduğundan $N$ terslenebilirdir ve $N^{-1}$ ters matrisi mevcuttur. O halde

$$\begin{pmatrix} A_+ \\ B_+ \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_- \\ B_- \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

olacak şekilde $2 \times 2$ tipinde bir $M$ geçiş matrisi mevcut olup

$$M = N^{-1}BN$$

formundadır.

Şimdi de $N^{-1}$ ters matrisi yardımıyla $M$ geçiş matrisinin $a$, $b$, $c$ ve $d$ bileşenleri cinsinden ifadesini elde edelim:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & , & 1 \\ ik & , & -ik \end{pmatrix} \Rightarrow N^{-1} = -\frac{1}{2ki} \begin{pmatrix} -ik & , & -1 \\ -ik & , & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow N^{-1} = \frac{1}{2ki} \begin{pmatrix} ik & , & 1 \\ ik & , & -1 \end{pmatrix}$$

$$M = N^{-1}BN \Rightarrow M = \frac{1}{2ki} \begin{pmatrix} ik & , & 1 \\ ik & , & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & , & b \\ c & , & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & , & 1 \\ ik & , & -ik \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{2ki} \begin{pmatrix} aki + c & , & bki + d \\ aki - c & , & bki - d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & , & 1 \\ ik & , & -ik \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{2ki} \begin{pmatrix} aki + c - bk^2 + dki & , & aki + c + bk^2 - dki \\ aki - c - bk^2 - dki & , & aki - c + bk^2 + dki \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{2ik} \begin{pmatrix} -bk^2 + i(a+d)k + c & , & bk^2 + i(a-d)k + c \\ -bk^2 + i(a-d)k - c & , & bk^2 + i(a+d)k - c \end{pmatrix}$$

bulunur. Buradan

$$M = N^{-1}BN = \frac{1}{2ik} \begin{pmatrix} -bk^2 + i(a+d)k + c & , & bk^2 + i(a-d)k + c \\ -bk^2 + i(a-d)k - c & , & bk^2 + i(a+d)k - c \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

eşitliği elde edilir.

$M$ geçiş matrisinin $M_{22}$ bileşeninin reel sıfırlarının karelerinin spektral singülerliklere; pozitif imajiner kısma sahip olan sıfırlarının karelerinin ise özdeğerlere karşılık geldiği A. Mostafazadeh tarafından 2009 yılında gösterilmiştir. O halde

$$bk^2 + i(a+d)k - c = 0 \tag{3.20}$$

denklemini sağlayan reel $k$ değerlerinin kareleri spektral singülerlik olup pozitif imajiner kısma sahip $k$ değerlerinin kareleri de birer özdeğer olacaktır.

(3.20) denkleminin köklerinin hangi koşullar altında spektral singülerlik ya da özdeğerlere karşılık geldiğini aşağıdaki durumlara göre adım adım inceleyelim:

- **$b \neq 0$ olsun.** Bu durumda $k_{1,2}$, (3.20) denkleminin kökleri olmak üzere

$$bk^2 + i(a+d)k - c = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \frac{-i(a+d) \mp \sqrt{-(a+d)^2 + 4bc}}{2b}$$

$$\Rightarrow \quad k_{1,2} = -i\left(\frac{a+d}{2b} \mp \sqrt{\left(\frac{a+d}{2b}\right)^2 - \frac{c}{b}}\right)$$

şeklinde bulunur. Burada kolaylık açısından

$$\mu := \frac{a+d}{2b} \quad , \quad \nu := \frac{c}{b} \tag{3.21}$$

sayılarını kullanacak olursak

$$k_{1,2} = -i\left(\mu \mp \sqrt{\mu^2 - \nu}\right) \tag{3.22}$$

ifadesini yazabiliriz. Dolayısıyla

$$\mathrm{Im}\,(k_{1,2}) = \mathrm{Im}\left(-i\left(\mu \mp \sqrt{\mu^2 - \nu}\right)\right) > 0$$

olması durumunda özdeğer mevcuttur. Bu ise

$$\mathrm{Re}\left(\mu \mp \sqrt{\mu^2 - \nu}\right) < 0$$

olmasına denktir. Diğer yandan

$$k_{1,2} = -i\left(\mu \mp \sqrt{\mu^2 - \nu}\right) \in \mathbb{R}$$

olması durumunda spektral singülerlik mevcuttur. Bu ise

$$\mathrm{Re}\left(\mu \mp \sqrt{\mu^2 - \nu}\right) = 0$$

olmasına denktir. Sonuç olarak

$$\mathrm{Re}\left(\mu \mp \sqrt{\mu^2 - \nu}\right) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad k_{1,2}^2 \text{ özdeğerdir.} \tag{3.23}$$

$$\mathrm{Re}\left(\mu \mp \sqrt{\mu^2 - \nu}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k_{1,2}^2 \text{ spektral singülerliktir.} \tag{3.24}$$

elde edilir.

Şimdi de bu durumun birkaç özel halini inceleyelim:

- $\boldsymbol{a+d=0}$ **olsun.** Bu durumda $\mu=0$ olup

$$\mu=0 \quad\Rightarrow\quad k_{1,2}=-i\left(\mp\sqrt{-\nu}\right)$$

elde edilir. O halde (3.23) ifadesi gereğince

$$\operatorname{Re}\left(\mp\sqrt{-\nu}\right)<0 \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{Re}\left(\mp i\sqrt{\nu}\right)<0 \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{Im}\left(\mp\sqrt{\nu}\right)>0$$

olacağından $\operatorname{Im}\left(\mp\sqrt{\nu}\right)>0$ olması durumunda özdeğer mevcuttur. Diğer yandan (3.24) ifadesi gereğince

$$\operatorname{Re}\left(\mp\sqrt{-\nu}\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{Re}\left(\mp i\sqrt{\nu}\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \nu\geq 0$$

olacağından da $\nu\geq 0$ olması durumunda spektral singülerlik mevcuttur. Yani

$$\begin{array}{llll} a+d=0 & , & \operatorname{Im}\left(\mp\sqrt{\nu}\right)>0 & \Rightarrow\; k_{1,2}^2 \text{ özdeğerdir.} \\ a+d=0 & , & \nu\geq 0 & \Rightarrow\; k_{1,2}^2 \text{ spektral singülerliktir.} \end{array}$$

sağlanır.

- $\boldsymbol{c=0}$ **olsun.** Bu durumda $\nu=0$ olup

$$\nu=0 \quad\Leftrightarrow\quad k_{1,2}=-i\left(\mu\mp\sqrt{\mu^2}\right) \quad\Leftrightarrow\quad k_1=-2i\mu \text{ ya da } k_2=0$$

elde edilir.

  * $k_1=-2i\mu$ için (3.23) ifadesi gereğince $\operatorname{Re}(2\mu)<0$ olması durumunda özdeğer mevcuttur.
    Diğer yandan (3.24) ifadesi gereğince de $\operatorname{Re}(2\mu)=0$ olması durumunda spektral singülerlik mevcuttur.
  * $k_2=0$ için ise tanımı gereğince spektral singülerlik ve özdeğerden bahsedemeyiz.

- $\boldsymbol{\mu^2=\nu}$ **olsun.** Bu durumda (3.20) denkleminin sol kısmı çift katlı

$$k_{1,2}=-i\mu$$

köküne sahip olacaktır.

(3.23) ifadesi gereğince

$$\text{Re}(\mu) < 0$$

olması durumunda özdeğer mevcuttur. Diğer yandan (3.24) ifadesi gereğince

$$\text{Re}(\mu) = 0 \quad , \quad \nu \leq 0$$

olması durumunda spektral singülerlik mevcuttur. Yani

$$\mu^2 = \nu \quad , \quad \text{Re}(\mu) < 0 \;\; \Rightarrow \;\; k_{1,2}^2 \text{ özdeğerdir.}$$
$$\mu^2 = \nu \quad , \quad \text{Re}(\mu) = 0 \quad , \quad \nu \leq 0 \;\; \Rightarrow \;\; k_{1,2}^2 \text{ spektral singülerliktir.}$$

sağlanır.

- $\boldsymbol{b = 0}$ **olsun.** Aşağıdaki iki durum ortaya çıkar:

  - $\boldsymbol{a + d \neq 0}$ **olsun.** Bu durumda (3.20) denklemi gereğince

$$\begin{aligned} bk^2 + i(a+d)k - c = 0 \quad , \quad b = 0 \;\; &\Rightarrow \;\; i(a+d)k - c = 0 \\ &\Rightarrow \;\; k = -i\frac{c}{a+d} \end{aligned}$$

olup (3.23) ifadesi gereğince

$$\text{Re}(\frac{c}{a+d}) < 0$$

olması durumunda özdeğer mevcuttur. Diğer yandan (3.24) ifadesi gereğince

$$\text{Re}(\frac{c}{a+d}) = 0$$

olması durumunda spektral singülerlik mevcuttur. Yani

$$b = 0 \quad , \quad a + d \neq 0 \quad , \quad \text{Re}(\frac{c}{a+d}) < 0 \;\; \Rightarrow \;\; k^2 \text{ özdeğerdir.}$$
$$b = 0 \quad , \quad a + d \neq 0 \quad , \quad \text{Re}(\frac{c}{a+d}) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; k^2 \text{ spektral singülerliktir.}$$

sağlanır.

- $\boldsymbol{a+d=0}$ **olsun.** Bu durumda (3.20) denklemi gözönüne alındığında $c=0$ bulunur. O halde (3.19) eşitliği ve (3.5) etkileşimi gereğince, sırasıyla, aşağıdaki gibi olacaktır:

$$M=\frac{1}{2ik}\begin{pmatrix} 0 & , & i(a-d)k \\ i(a-d)k & , & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M=\begin{pmatrix} 0 & , & a \\ a & , & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B=\begin{pmatrix} a & , & b \\ c & , & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B=\begin{pmatrix} a & , & 0 \\ 0 & , & -a \end{pmatrix}$$

O halde

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & , & 1 \\ 1 & , & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & , & 0 \\ 0 & , & -1 \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

olmak üzere

$$M = a\sigma_1 \quad , \quad B = a\sigma_3$$

ifadeleri elde edilir. $M$, $k$ değerinden bağımsız olduğu için $M_{22}$ nin kökleri kaybolur. Ayrıca

$$\det M = \det B = -a^2$$

olup $a = \mp i$ olmalıdır.

## 3.2 P-, T- ve PT-simetri

### 3.2.1 P-simetri

(3.7) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned}(P\psi')(x) &= \left(P\frac{\partial}{\partial x}\psi\right)(x)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\psi(-x)\\ &= -\psi'(-x)\end{aligned}$$

olup

$$(P\psi')(x) = -\psi'(-x) \tag{3.26}$$

eşitliğinin gerçeklendiği görülür. Benzer bir ifadeyi iki bileşenli $\Psi := \begin{pmatrix} \psi \\ \psi' \end{pmatrix}$ dalgafonksiyonu için elde edelim:

$$\begin{aligned}(P\Psi)(x) &= \begin{pmatrix} (P\psi)(x) \\ (P\psi')(x) \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \psi(-x) \\ -\psi'(-x) \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 1 \ , & 0 \\ 0 \ , & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi(-x) \\ \psi'(-x) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda

$$(P\Psi)(x) = \sigma_3\Psi(-x) \tag{3.27}$$

eşitliği gerçeklenir.

$$\begin{cases} \Psi(x^-) = \Psi(x) \quad , \quad x \leqslant 0 \\ \Psi(x^+) = \Psi(x) \quad , \quad x \geqslant 0 \end{cases} \tag{3.28}$$

eşitliklerinin sağlandığı dikkate alındığında (3.27) eşitliği gereğince

$$\begin{cases} (P\Psi)(x^-) = \sigma_3\Psi(-x^+) \quad , \quad x \leqslant 0 \\ (P\Psi)(x^+) = \sigma_3\Psi(-x^-) \quad , \quad x \geqslant 0 \end{cases} \tag{3.29}$$

eşitliklerinin sağlandığı da açıktır. Diğer yandan (3.5) etkileşimi için (3.9) koşulunun sağlanması halinde (3.27) eşitliği yardımıyla

$$
\begin{aligned}
(P\Psi)(0^+) = B(P\Psi)(0^-) \quad &\Rightarrow \quad \sigma_3\Psi(-0^-) = B\sigma_3\Psi(-0^+) \\
&\Rightarrow \quad \sigma_3\Psi(0^-) = B\sigma_3\Psi(0^+) \\
&\Rightarrow \quad \sigma_3\Psi(0^-) = B\sigma_3 B\Psi(0^-)
\end{aligned}
$$

olup

$$B\sigma_3 B = \sigma_3 \tag{3.30}$$

ifadesinin sağlandığı kolaylıkla görülür. Bu demektir ki, (3.5) etkileşiminin P-simetrik olması (3.30) bağıntısıyla da verilebilir.

Şimdi de tersten gelelim. Yani, (3.5) etkileşiminden yola çıkarak ilerleyelim:

$$
\begin{aligned}
\Psi(0^+) = B\Psi(0^-) \quad &\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \psi(0^+) \\ \psi'(0^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & , & b \\ c & , & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(0^-) \\ \psi'(0^-) \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} \psi(0^+) = a\psi(0^-) + b\psi'(0^-) \\ \psi'(0^+) = c\psi(0^-) + d\psi'(0^-) \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} \psi(0^+) = a\psi(0^-) + (-b)(-\psi'(0^-)) \\ -\psi'(0^+) = (-c)\psi(0^-) + d(-\psi'(0^-)) \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \psi(0^+) \\ -\psi'(0^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & , & -b \\ -c & , & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(0^-) \\ -\psi'(0^-) \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} (P\psi)(0^-) \\ (P\psi')(0^-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & , & -b \\ -c & , & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (P\psi)(0^+) \\ (P\psi')(0^+) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan

$$\widetilde{B} := \begin{pmatrix} a & , & -b \\ -c & , & d \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

olmak üzere

$$(P\Psi)(0^-) = \widetilde{B}\,(P\Psi)(0^+) \tag{3.32}$$

elde edilir. O halde (3.5) etkileşiminin P-simetrik olabilmesi için $\widetilde{B}^{-1}$ ters matrisinin mevcut olup

$$\widetilde{B}^{-1} = B \tag{3.33}$$

eşitliğini sağlaması gerekir.

Şimdi $B$ matrisinin hangi özel hali için (3.33) eşitliğinin sağlandığını bulalım:

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} a & , & -b \\ -c & , & d \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \widetilde{B}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & , & b \\ c & , & a \end{pmatrix} \quad , \quad ad-bc \neq 0$$

olup

$$\widetilde{B}^{-1} = B \;\;\Rightarrow\;\; \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & , & b \\ c & , & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & , & b \\ c & , & d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{d}{ad-bc} \quad , \quad b = \frac{b}{ad-bc} \quad , \quad c = \frac{c}{ad-bc} \quad , \quad d = \frac{a}{ad-bc}$$

$$\Rightarrow \quad ad-bc = 1 \quad , \quad a = d \quad , \quad a,b,c,d \in \mathbb{C}$$

elde edilir.

Sonuç olarak $B$ matrisi bileşenlerinin

$$ad-bc = 1 \quad , \quad a = d \quad , \quad a,b,c,d \in \mathbb{C} \tag{3.34}$$

koşulunu sağlaması halinde (3.5) etkileşimi P-simetrik olacaktır.

Şimdi P-simetrik olan (3.5) nokta etkileşimi için spektral singülerlik ve özdeğerlerin yapısını inceleyelim:

- ***b* ≠ 0 olsun.** Bu durumda (3.34) ifadesi gereğince

$$ad-bc = 1 \quad , \quad a = d \;\;\Rightarrow\;\; c = \frac{a^2-1}{b}$$

bulunur. Bu durumda

$$\mu = \frac{a}{b} \quad , \quad \nu = \frac{a^2-1}{b^2}$$

olup (3.20) denkleminin kökleri

$$k_{1,2} = -i\left(\mu \mp \sqrt{\mu^2-\nu}\right) \;\;\Rightarrow\;\; k_{1,2} = -i\left(\frac{a}{b} \mp \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a^2-1}{b^2}\right)}\right)$$

$$\Rightarrow \;\; k_{1,2} = -i\left(\frac{a \mp 1}{b}\right)$$

şeklinde bulunur. O halde

$$\operatorname{Im}(k_{1,2}) = \operatorname{Im}\left(-i\left(\frac{a \mp 1}{b}\right)\right) > 0$$

olması durumunda özdeğer mevcuttur. Bu ise

$$\operatorname{Re}\left(\frac{a \mp 1}{b}\right) < 0$$

olmasına denktir. Diğer yandan

$$k_{1,2} = -i\left(\frac{a \mp 1}{b}\right) \in \mathbb{R}$$

olması durumunda spektral singülerlik mevcuttur. Bu ise

$$\operatorname{Re}\left(\frac{a \mp 1}{b}\right) = 0$$

olmasına denktir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(\frac{a \mp 1}{b}\right) < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad k_{1,2}^2 \text{ özdeğerdir.} \\
\operatorname{Re}\left(\frac{a \mp 1}{b}\right) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad k_{1,2}^2 \text{ spektral singülerliktir.}
\end{aligned}$$

elde edilir.

- ***b* = 0 olsun.** Bu durumda (3.34) ifadesi gereğince

$$ad - bc = 1 \quad , \quad a = d \quad , \quad b = 0 \ \Rightarrow \ a = d = \mp 1$$

bulunur.

  – ***b* = 0 ve *a* = 1 olsun.** Bu durumda (3.20) denklemi gereğince

$$bk^2 + i(a+d)k - c = 0 \quad , \quad b = 0 \quad , \quad a = d = 1 \ \Rightarrow \ k = -i\frac{c}{2}$$

  olup

$$\operatorname{Im}(k) = \operatorname{Im}\left(-i\frac{c}{2}\right) > 0$$

  olması durumunda özdeğer mevcuttur.

Bu ise

$$\mathrm{Re}\,(c) < 0$$

olmasına denktir. Diğer yandan

$$k = -i\frac{c}{2} \in \mathbb{R}$$

olması durumunda spektral singülerlik mevcuttur. Bu ise

$$\mathrm{Re}\,(c) = 0$$

olmasına denktir. Dolayısıyla

$$\mathrm{Re}\,(c) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 \text{ özdeğerdir.}$$

$$\mathrm{Re}\,(c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 \text{ spektral singülerliktir.}$$

elde edilir.

– $\boldsymbol{b = 0}$ **ve** $\boldsymbol{a = -1}$ **olsun.** Bu durumda (3.20) denklemi gereğince

$$bk^2 + i(a+d)k - c = 0 \quad , \quad b = 0 \quad , \quad a = d = -1 \quad \Rightarrow \quad k = i\frac{c}{2}$$

olup

$$\mathrm{Im}\,(k) = \mathrm{Im}\left(i\frac{c}{2}\right) > 0$$

olması durumunda özdeğer mevcuttur. Bu ise

$$\mathrm{Re}\,(c) > 0$$

olmasına denktir. Diğer yandan

$$k = i\frac{c}{2} \in \mathbb{R}$$

olması durumunda spektral singülerlik mevcuttur. Bu ise

$$\mathrm{Re}\,(c) = 0$$

olmasına denktir. Dolayısıyla

$$\mathrm{Re}\,(c) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 \text{ özdeğerdir.}$$

$$\mathrm{Re}\,(c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 \text{ spektral singülerliktir.}$$

elde edilir.

### 3.2.2 T-simetri

(3.5) etkileşimi için (3.10) koşulunun sağlanması halinde (3.8) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} \Psi(0^+) = B\Psi(0^-) \quad &\Leftrightarrow \quad \Psi^*(0^+) = B^*\Psi^*(0^-) \\ &\Leftrightarrow \quad (T\Psi)(0^+) = B^*(T\Psi)(0^-) \end{aligned}$$

olup (3.5) etkileşiminin T-simetrik olabilmesi için

$$B^* = B$$

ifadesinin sağlanması gereklidir. Bu ise $B$ matrisinin reel olması anlamına gelir. (3.5) etkileşiminin T-simetrik olması halinde spektral singülerlik ve özdeğerlerin var olma durumlarını aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

- $\boldsymbol{b \neq 0}$ **olsun.** Bu durumda $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ olacağından $k = -i\left(\mu \mp \sqrt{\mu^2 - \nu}\right)$ için $\mu = 0$ ve $\nu \in \mathbb{R}^+$ olması halinde $\mathrm{Im}(k) = 0$ olup spektral singülerlik mevcuttur. Diğer yandan $k = -i\left(\mu \mp \sqrt{\mu^2 - \nu}\right)$ için $\mu < 0$ ve $\mu^2 - \nu < 0$ olması halinde $\mathrm{Im}(k) < 0$ olup özdeğer mevcuttur. Yani

  $$\begin{array}{llll} \dfrac{a+d}{b} < 0 & , \quad (a+d)^2 - 4bc < 0 & \Leftrightarrow & k^2 \text{ özdeğerdir.} \\ a + d = 0 & , \quad \dfrac{c}{b} \in \mathbb{R}^+ & \Leftrightarrow & k^2 \text{ spektral singülerliktir.} \end{array}$$

  sağlanır.

- $\boldsymbol{b = 0}$ **olsun.**

  - $\boldsymbol{a + d \neq 0}$ **olsun.** Bu durumda (3.20) denklemi gereğince

    $$bk^2 + i(a+d)k - c = 0 \quad , \quad b = 0 \quad , \quad a + d \neq 0 \quad \Rightarrow \quad k = -i\frac{c}{a+d}$$

    olup

    $$\mathrm{Im}\,(k) = \mathrm{Im}\left(-i\frac{c}{a+d}\right) > 0$$

    olması durumunda özdeğer mevcuttur.

Bu ise

$$\frac{c}{a+d} < 0$$

olmasına denktir. Diğer yandan

$$k = -i\frac{c}{a+d} \in \mathbb{R}$$

olması durumunda spektral singülerlik mevcuttur. Bu ise

$$c = 0$$

olmasına denktir. Dolayısıyla

$$\frac{c}{a+d} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 \text{ özdeğerdir.}$$
$$c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 \text{ spektral singülerliktir.}$$

elde edilir.

– $\boldsymbol{a+d=0}$ **olsun.** Bu durumda (3.20) denkleminin sağlanması için $c = 0$ olmalıdır.

$$b = c = 0 \quad , \quad d = -a \quad \Rightarrow \quad \det M = -a^2$$

bulunur. $a \in \mathbb{R}$ olduğundan da $\det M \neq 1$ olup etkileşim aykırıdır. $\det M = 1$ olacağından $a + d = 0$ olamaz.

### 3.2.3 PT-simetri

(3.5) etkileşimi için (3.11) koşulunun sağlanması

$$B^{*}\sigma_3 B=\sigma_3 \tag{3.39}$$

bağıntısına denktir. Gerçekten de (3.5) etkileşiminden (3.27) ve (3.8) tanımları yardımıyla

$$\begin{aligned}
\Psi(0^+)=B\Psi(0^-) \;\;&\Rightarrow\;\; \Psi^{*}(0^+)=B^{*}\Psi^{*}(0^-)\\
&\Rightarrow\;\; (T\Psi)\,(0^+)=B^{*}\,(T\Psi)\,(0^-)\\
&\Rightarrow\;\; \sigma_3\,(P\,(T\Psi))\,(0^-)=B^{*}\sigma_3\,(P\,(T\Psi))\,(0^+)\\
&\Rightarrow\;\; \sigma_3\,(PT\Psi)\,(0^-)=B^{*}\sigma_3 B\,(PT\Psi)\,(0^-)\\
&\Rightarrow\;\; \sigma_3=B^{*}\sigma_3 B
\end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntıyı $B$ matrisinin bileşenleri cinsinden elde edelim

$$B^{*}\sigma_3 B=\sigma_3 \;\;\Rightarrow\;\; \begin{pmatrix} a^{*} & , & b^{*}\\ c^{*} & , & d^{*}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & , & 0\\ 0 & , & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & , & b\\ c & , & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & , & 0\\ 0 & , & -1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\;\; \begin{pmatrix} a^{*} & , & -b^{*}\\ c^{*} & , & -d^{*}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & , & b\\ c & , & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & , & 0\\ 0 & , & -1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\;\; \begin{pmatrix} a^{*}a-b^{*}c & , & a^{*}b-b^{*}d\\ c^{*}a-d^{*}c & , & c^{*}b-d^{*}d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & , & 0\\ 0 & , & -1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\;\; a^{*}a=1+b^{*}c \;\;,\;\; a^{*}b-b^{*}d=0 \;\;,\;\; c^{*}a-d^{*}c=0 \;\;,\;\; d^{*}d=1+c^{*}b$$

$$\Rightarrow\;\; |a|^2=|d|^2=1+c^{*}b \;\;,\;\; a^{*}b=b^{*}d \;\;,\;\; c^{*}a=d^{*}c$$

sağlanır. Diğer yandan

$$|a|=r_a \;\;,\;\; |b|=r_b \;\;,\;\; |c|=r_c \;\;,\;\; |d|=r_d$$

olmak üzere $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ olduğundan

$$a = r_a e^{i\alpha} \quad , \quad b = r_b e^{i\beta} \quad , \quad c = r_c e^{i\theta} \quad , \quad d = r_d e^{i\delta}$$

olacak şekilde $\alpha, \beta, \theta, \delta$ sabitleri vardır. O halde

$$\begin{array}{lll} I. & |a|^2 = |d|^2 & \Rightarrow \; r_a = r_d \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} II. & a^* b = b^* d & \Rightarrow \; r_a r_b e^{(\beta-\alpha)i} = r_b r_d e^{(\delta-\beta)i} & \\ & & \Rightarrow \; (\beta - \alpha)\, i = (\delta - \beta)\, i + 2n\pi i & , \; n \in \mathbb{Z} \\ & & \Rightarrow \; \beta = \dfrac{\alpha+\delta}{2} + n\pi & , \; n \in \mathbb{Z} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} III. & d^* c = c^* a & \Rightarrow \; r_c r_d e^{(\theta-\delta)i} = r_a r_c e^{(\alpha-\theta)i} & \\ & & \Rightarrow \; (\theta - \delta)\, i = (\alpha - \theta)\, i + 2m\pi i & , \; m \in \mathbb{Z} \\ & & \Rightarrow \; \theta = \dfrac{\alpha+\delta}{2} + m\pi & , \; m \in \mathbb{Z} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} IV. & |a|^2 = |d|^2 = 1 + c^* b & \Rightarrow \; r_a^2 = r_d^2 = 1 + r_b r_c e^{(n-m)\pi i} & , \; m, n \in \mathbb{Z} \\ & & \Rightarrow \; r_a^2 = r_d^2 = 1 + r_b r_c (-1)^{n-m} & , \; m, n \in \mathbb{Z} \end{array}$$

olup $m, n \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{cases} a = \sqrt{1 + (-1)^{n-m} r_b r_c}\, e^{i\alpha} \\ b = (-1)^n r_b e^{i\frac{\alpha+\delta}{2}} \\ c = (-1)^m r_c e^{i\frac{\alpha+\delta}{2}} \\ d = \sqrt{1 + (-1)^{n-m} r_b r_c}\, e^{i\delta} \end{cases}$$

eşitlikleri elde edilir. Diğer yandan $r_b, r_c \in [0, +\infty)$ olduğundan

$$1 + (-1)^{n-m} r_b r_c \geq 0$$

olmalıdır. Bu durumda

$$1 + (-1)^{n-m} r_b r_c \geq 0 \;\; \Rightarrow \;\; (-1)^{n-m} \geq -\frac{1}{r_b r_c}$$

sağlanır.

- **$\boldsymbol{n-m}$ çift tam sayı olsun.**

  – **$\boldsymbol{n=2n_1}$ ve $\boldsymbol{m=2m_1}$ olacak şekilde $\boldsymbol{n_1, m_1} \in \mathbb{Z}$ olsun.**

$$1+(-1)^{n-m}r_br_c = 1+(-1)^{2(n_1-m_1)}r_br_c \quad \Rightarrow \quad 1+(-1)^{n-m}r_br_c = 1+r_br_c$$

olup $r_b, r_c \in [0,+\infty)$ olduğundan

$$1+(-1)^{n-m}r_br_c \geq 0$$

sağlanır. O halde

$$\begin{cases} a=\sqrt{1+r_br_c}e^{i\alpha} \\ b=r_be^{i\frac{\alpha+\delta}{2}} \\ c=r_ce^{i\frac{\alpha+\delta}{2}} \\ d=\sqrt{1+r_br_c}e^{i\delta} \end{cases}$$

elde edilir.

  – **$\boldsymbol{n=2n_2+1}$ ve $\boldsymbol{m=2m_2+1}$ olacak şekilde $\boldsymbol{n_2, m_2} \in \mathbb{Z}$ olsun.**

$$1+(-1)^{n-m}r_br_c = 1+(-1)^{2(n_2-m_2)}r_br_c \quad \Rightarrow \quad 1+(-1)^{n-m}r_br_c = 1+r_br_c$$

olup $r_b, r_c \in [0,+\infty)$ olduğundan

$$1+(-1)^{n-m}r_br_c \geq 0$$

sağlanır. O halde

$$\begin{cases} a=\sqrt{1+r_br_c}e^{i\alpha} \\ b=-r_be^{i\frac{\alpha+\delta}{2}} \\ c=-r_ce^{i\frac{\alpha+\delta}{2}} \\ d=\sqrt{1+r_br_c}e^{i\delta} \end{cases}$$

elde edilir.

- **$\boldsymbol{n-m}$ tek tam sayı olsun.**

  - **$\boldsymbol{n=2n_1}$ ve $\boldsymbol{m=2m_1+1}$ olacak şekilde $\boldsymbol{n_1, m_1} \in \mathbb{Z}$ olsun.**

    $$1+(-1)^{n-m} r_b r_c = 1+(-1)^{2(n_1-m_1)-1} r_b r_c \quad \Rightarrow \quad 1+(-1)^{n-m} r_b r_c = 1 - r_b r_c$$

    olup

    $$0 \leq r_b r_c \leq 1$$

    olması halinde

    $$1+(-1)^{n-m} r_b r_c \geq 0$$

    sağlanır. O halde

    $$\begin{cases} a = \sqrt{1-r_b r_c}\, e^{i\alpha} \\ b = -r_b e^{i\frac{\alpha+\delta}{2}} \\ c = -r_c e^{i\frac{\alpha+\delta}{2}} \\ d = \sqrt{1-r_b r_c}\, e^{i\delta} \end{cases}$$

    elde edilir.

  - **$\boldsymbol{n=2n_2+1}$ ve $\boldsymbol{m=2m_2}$ olacak şekilde $\boldsymbol{n_2, m_2} \in \mathbb{Z}$ olsun.**

    $$1+(-1)^{n-m} r_b r_c = 1+(-1)^{2(n_2-m_2)+1} r_b r_c \quad \Rightarrow \quad 1+(-1)^{n-m} r_b r_c = 1 - r_b r_c$$

    olup $0 \leq r_b r_c \leq 1$ olması halinde $1+(-1)^{n-m} r_b r_c \geq 0$ sağlanır. O halde

    $$\begin{cases} a = \sqrt{1+r_b r_c}\, e^{i\alpha} \\ b = -r_b e^{i\frac{\alpha+\delta}{2}} \\ c = r_c e^{i\frac{\alpha+\delta}{2}} \\ d = \sqrt{1+r_b r_c}\, e^{i\delta} \end{cases}$$

    elde edilir.

Her iki ifade de tek bir gösterimle

$$\epsilon_1 := (-1)^m \quad , \quad \epsilon_2 := \begin{cases} \epsilon_1 & , \quad 0 \leq r_b r_c \leq 1 \\ 1 & , \qquad r_b r_c > 1 \end{cases}$$

olmak üzere

$$\begin{cases} a = \sqrt{1+\epsilon_2 r_b r_c}\, e^{i\alpha} \\ b = \epsilon_1 \epsilon_2 r_b e^{i\frac{\alpha+\delta}{2}} \\ c = \epsilon_1 r_c e^{i\frac{\alpha+\delta}{2}} \\ d = \sqrt{1+\epsilon_2 r_b r_c}\, e^{i\delta} \end{cases} \tag{3.40}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda geçiş matrisi

$$B = e^{i\frac{\alpha+\delta}{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1+\epsilon_2 r_b r_c}\, e^{i\frac{\alpha-\delta}{2}} & , & \epsilon_1 \epsilon_2 r_b \\ \epsilon_1 r_c & , & \sqrt{1+\epsilon_2 r_b r_c}\, e^{-i\frac{\alpha-\delta}{2}} \end{pmatrix} \tag{3.41}$$

formunda elde edilir. Dolayısıyla $\det B = e^{i(\alpha+\delta)}$ olacağından $\alpha+\delta$, $2\pi$ nin tam katları olmalıdır. Aksi halde $\det B \neq 1$ olup etkileşim aykırı olurdu.

Spektral singülerlik ve özdeğerlerin varlığı için aşağıdaki durumları inceleyelim:

- **$b \neq 0$ olsun.**

$$\mu = \frac{a+d}{2b} \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{\sqrt{1+\epsilon_2 r_b r_c}\, e^{i\alpha} + \sqrt{1+\epsilon_2 r_b r_c}\, e^{i\delta}}{2\epsilon_1 \epsilon_2 r_b e^{i\frac{\alpha+\delta}{2}}}$$

$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{e^{i\frac{\alpha+\delta}{2}} \left[\sqrt{1+\epsilon_2 r_b r_c} \left(e^{i\frac{\alpha-\delta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\delta}{2}}\right)\right]}{2\epsilon_1 \epsilon_2 r_b e^{i\frac{\alpha+\delta}{2}}}$$

$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{\sqrt{1+\epsilon_2 r_b r_c} \cos\left(\frac{\alpha-\delta}{2}\right)}{\epsilon_1 \epsilon_2 r_b}$$

$$\nu = \frac{c}{b} \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{\epsilon_1 r_c e^{i\frac{\alpha+\delta}{2}}}{\epsilon_1 \epsilon_2 r_b e^{i\frac{\alpha+\delta}{2}}}$$

$$\Rightarrow \quad \nu = \frac{\epsilon_2 r_c}{r_b}$$

değerleri elde edilir ki bu durum $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ olmasını gerektirir. O halde

$$\mathrm{Re}(k) = 0$$

olması durumunda spektral singülerlik mevcut olacaktır. Bu ise

$$\mu = 0 \quad , \quad \nu > 0$$

olmasına denktir. $\epsilon_2 = +1$ ve $\ell \in \mathbb{Z}$ için $\delta = \alpha + (2\ell + 1)\pi$ olsun. Bu durumda $k = \sqrt{\nu}$ spektral singülerliğine sahip PT-simetrik nokta etkileşimi

$$\epsilon = (-1)^{\ell}\epsilon_2$$

olmak üzere

$$B = e^{i\alpha}\begin{pmatrix} \sqrt{1 + r_b r_c} & , & i\epsilon r_b \\ i\epsilon r_c & , & -\sqrt{1 + r_b r_c} \end{pmatrix}$$

formunda elde edilir. Benzer düşünceyle

$$\mathrm{Im}(k) > 0$$

olması durumunda özdeğer mevcut olacaktır. Bu ise

$$\mu < 0$$

olmasına denktir. Dolayısıyla

$$\mu < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{1 + \epsilon_2 r_b r_c}\cos\left(\frac{\alpha - \delta}{2}\right)}{\epsilon_1 \epsilon_2 r_b} < 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos\left(\frac{\alpha - \delta}{2}\right)}{\epsilon_1 \epsilon_2} < 0$$

olup üç durum mevcuttur. Şimdi bu durumları inceleyelim:

- **$\boldsymbol{\mu^2 - \nu > 0}$ olsun.** Bu durumda reel ve negatif enerjiye sahip bir çift özdeğer mevcut olup enerjisi

  $$k^2 = -\left(2\mu^2 - \nu \mp \mu\sqrt{\mu^2 - \nu}\right)$$

  şeklinde olacaktır.

- **$\boldsymbol{\mu^2 - \nu = 0}$ olsun.** Bu durumda reel ve negatif enerjiye sahip bir tek özdeğer mevcut olup enerjisi

  $$k^2 = -\mu^2$$

  şeklinde olacaktır.

– $\boldsymbol{\mu^2 - \nu > 0}$ **olsun.** Bu durumda kompleks enerjiye sahip bir çift özdeğer mevcut olup enerjisi

$$k^2 = \nu - 2\mu^2 \mp i\mu\sqrt{\nu - \mu^2}$$

şeklinde olacaktır.

- $\boldsymbol{b = 0}$ **olsun.**

  – $\boldsymbol{a + d \neq 0}$ **olsun.** Bu durumda spektral singülerlik yoktur.

  $$\epsilon_1 \cos\left(\frac{\alpha - \delta}{2}\right) < 0$$

  için reel ve negatif enerjiye sahip bir tek özdeğer mevcut olup enerjisi

  $$k^2 = -\frac{1}{4} r_c^2 \sec^2\left(\frac{\alpha - \delta}{2}\right)$$

  şeklinde olacaktır.

  – $\boldsymbol{a + d = 0}$ **olsun.** Bu durumda $r_c = 0$ için $M_{22} = 0$ sağlanır. O halde

  $$B = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & , & 0 \\ 0 & , & -e^{i\alpha} \end{pmatrix}$$

  olup $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ ya da $\alpha \neq \frac{3\pi}{2}$ olması durumunda etkileşim aykırı olacaktır.

# 4. KOMPLEKS BARİYER POTANSİYELİ

## 4.1 Spektral Singülerlikler

Bu kısımda $a \in \mathbb{R}^+$ ve $\zeta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ olmak üzere

$$\nu_{a,\zeta}(x) = \begin{cases} i\zeta & , \quad -a < x < 0 \\ -i\zeta & , \quad 0 < x < a \\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases} \tag{4.1}$$

olarak tanımlı imajiner potansiyel dikkate alınacaktır.

$\nu(x)$, $|x| \to \infty$ için hızla azalan kompleks saçılım potansiyeli olmak üzere $H = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu(x)$ Schrödinger operatörü verilsin ve $H\psi(x) = k^2\psi(x)$ özdeğer denkleminin

$$\psi_{k_\pm}(x) \to e^{\pm ikx} \quad , \quad x \to \pm\infty \tag{4.2}$$

asimptotik sınır koşullarını sağlayan Jost çözümleri $\psi_{k_\pm}(x)$ ile gösterilsin. O halde $H$ operatörünün spektral singülerliği, sürekli spektrumuna karşılık gelen $\psi_{k_\pm}(x)$ çözümlerini lineer bağımlı yapan $k^2$ noktalarıdır. Yani bu çözümler

$$\psi_{k_+}\psi'_{k_-} - \psi'_{k_+}\psi_{k_-} = 0 \tag{4.3}$$

eşitliğine sahip olmalıdır. $H\psi(x) = k^2\psi(x)$ özdeğer denkleminin genel çözümünü $\psi_k$ ile gösterilsin. Ayrıca

$$\nu(x) \to 0 \quad , \quad x \to \pm\infty$$

olduğundan $A_\pm$ ile $B_\pm$ kompleks sabitler olmak üzere

$$\psi_k \to A_\pm e^{ikx} + B_\pm e^{-ikx} \quad , \quad x \to \pm\infty \tag{4.4}$$

asimptotiği gerçeklenir. Burada ilginç olan özelliklerden biri

$$\begin{pmatrix} A_+ \\ B_+ \end{pmatrix} = M(k) \begin{pmatrix} A_- \\ B_- \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

olacak şekilde bir $M(k)$ geçiş matrisinin varlığıdır.

$H\psi(x) = k^2\psi(x)$ özdeğer denkleminin sol ve sağ saçılım çözümleri $\psi_k^l$ ve $\psi_k^r$ ile tanımlansın. $N_l$, $N_r$, $R^l$, $R^r$, $T^l$ ve $T^r$ kompleks sabitler olmak üzere

$$\begin{array}{l} \psi_k^l(x) \rightarrow \begin{cases} N_l(e^{ikx} + R^l e^{-ikx}) & , \quad x \rightarrow -\infty \\ N_l T^l e^{ikx} & , \quad x \rightarrow +\infty \end{cases} \\ \psi_k^r(x) \rightarrow \begin{cases} N_r T^r e^{-ikx} & , \quad x \rightarrow -\infty \\ N_r(e^{-ikx} + R^r e^{ikx}) & , \quad x \rightarrow +\infty \end{cases} \end{array} \tag{4.6}$$

asimptotikleri sağlanır. (4.6) asimptotikleri (4.4) asimptotiği ile birlikte düşünüldüğünde, $\psi_k^l$ ve $\psi_k^r$ için $A_\pm$ ve $B_\pm$ sabitleri belirlenebilir ve bunlar $R^l$, $R^r$, $T^l$ ile $T^{\,r}$ sabitlerini, $M(k)$ matrisinin bileşenleri cinsinden ifade etmek için kullanılabilir. $\det M(k) = 1$ olduğu kullanılarak

$$\begin{array}{lll} T^l = \dfrac{1}{M_{22}(k)} & , & R^l = -\dfrac{M_{21}(k)}{M_{22}(k)} \\ T^r = \dfrac{1}{M_{22}(k)} & , & R^r = \dfrac{M_{21}(k)}{M_{22}(k)} \end{array} \tag{4.7}$$

eşitlikleri elde edilmiştir. (4.7) eşitliklerinden, $M_{22}(k) = 0$ olması halinde spektral singülerlik mevcut olup $R^l$, $R^r$, $T^l$ ile $T^r$ sabitleri sonsuz eğiliminde olacaktır. (4.7) eşitliklerinin bir diğer sonucu da $T^l = T^r$ olmasıdır.

## 4.2 PT-Simetrik Bariyer Potansiyeli

(4.1) ile verilen $\nu_{a,\zeta}(x)$ potansiyeli için $H = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu_{a,\zeta}(x)$ Hamilton operatörü ele alındığında, $|x| > a$ olması durumunda $\nu_{a,\zeta}(x) = 0$ olduğundan, önceki kısımda bulduğumuz sonuçlar $\nu_{a,\zeta}(x)$ potansiyeli için de geçerlidir. $H\psi(x) = k^2\psi(x)$ özdeğer denkleminin genel çözümü

$$w := \sqrt{1 - iy} \quad , \quad y := \tfrac{\zeta}{k^2} \tag{4.8}$$

ve $A_\pm, B_\pm, C_\pm$ ile $D_\pm$ kompleks sabitler olmak üzere

$$\psi(x) = \begin{cases} A_- e^{ikx} + B_- e^{-ikx} & , \quad x \leq -a \\ C_- e^{ikwx} + D_- e^{-ikwx} & , \quad -a < x < 0 \\ C_+ e^{ikw^*x} + D_+ e^{-ikw^*x} & , \quad 0 < x < a \\ A_+ e^{ikx} + B_+ e^{-ikx} & , \quad a \leq x \end{cases} \tag{4.9}$$

şeklinde elde edilir. Bu aşamada $\psi$ ile $\psi'$ fonksiyonlarının sürekliliğinden yararlanılarak spektral singülerlikleri bulmak için $M(k)$ matrisinin $M_{22}(k)$ bileşeni araştırılacaktır.

$(a)$ $x = -a$ noktasındaki süreklilikten

$$\begin{cases} \psi(-a^-) = \psi(-a^+) \\ \psi'(-a^-) = \psi'(-a^+) \end{cases}$$

olup

$$\begin{cases} A_- e^{-ika} + B_- e^{ika} = C_- e^{-ikwa} + D_- e^{ikwa} \\ A_- e^{-ika} - B_- e^{ika} = wC_- e^{-ikwa} - wD_- e^{ikwa} \end{cases}$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan

$$\begin{pmatrix} e^{-ika} & , & e^{ika} \\ e^{-ika} & , & -e^{ika} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_- \\ B_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-ikwa} & , & e^{ikwa} \\ we^{-ikwa} & , & -we^{ikwa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_- \\ D_- \end{pmatrix}$$

olup

$$\begin{pmatrix} C_- \\ D_- \end{pmatrix} = \frac{1}{2w} \begin{pmatrix} (w+1)e^{ik(w-1)a} & , & (w-1)e^{ik(1+w)a} \\ (w-1)e^{-ik(1+w)a} & , & (1+w)e^{-ik(w-1)a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_- \\ B_- \end{pmatrix}$$

eşitliği bulunur.

$(b)$ $x = 0$ noktasındaki süreklilikten

$$\begin{cases} \psi(0^-) = \psi(0^+) \\ \psi'(0^-) = \psi'(0^+) \end{cases}$$

olup

$$\begin{cases} C_- + D_- = C_+ + D_+ \\ wC_- - wD_- = w^*C_+ - w^*D_+ \end{cases}$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan

$$\begin{pmatrix} 1 & , & 1 \\ w & , & -w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_- \\ D_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & , & 1 \\ w^* & , & -w^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_+ \\ D_+ \end{pmatrix}$$

olup

$$\begin{pmatrix} C_+ \\ D_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{2w^*} \begin{pmatrix} w^* + w & , & w^* - w \\ w^* - w & , & w^* + w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_- \\ D_- \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir.

$(c)$ $x = a$ noktasındaki süreklilikten

$$\begin{cases} \psi(a^-) = \psi(a^+) \\ \psi'(a^-) = \psi'(a^+) \end{cases}$$

olup

$$\begin{cases} C_+ e^{ikw^*a} + D_+ e^{-ikw^*a} = A_+ e^{ika} + B_+ e^{-ika} \\ w^* C_+ e^{ikw^*a} - w^* D_+ e^{-ikw^*a} = A_+ e^{ika} - B_+ e^{-ika} \end{cases}$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan

$$\begin{pmatrix} e^{ikw^*a} & , & e^{-ikw^*a} \\ w^* e^{ikw^*a} & , & -w^* e^{-ikw^*a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_+ \\ D_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ika} & , & e^{-ika} \\ e^{ika} & , & -e^{-ika} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_+ \\ B_+ \end{pmatrix}$$

olup

$$\begin{pmatrix} A_+ \\ B_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + w^*) e^{ik(1-w^*)a} & , & (1 - w^*) e^{ik(1+w^*)a} \\ (1 - w^*) e^{-ik(1+w^*)a} & , & (1 + w^*)\, e^{-ik(1-w^*)a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_+ \\ D_+ \end{pmatrix}$$

eşitliği bulunur.

$(a)$ ve $(b)$ durumlarında elde edilen eşitliklerler $(c)$ durumunda dikkate alındığında

$$f_1(k) \;:\; = \sqrt{1+y^2}\,|\cos(akw)|^2 - |\sin(akw)|^2 \tag{4.10a}$$

$$f_2(k) \;:\; = \mathrm{Re}[\sqrt{1+iy}(2-iy)\cos(akw^*)\sin(akw)] \tag{4.10b}$$

reel değerli iki fonksiyon olmak üzere

$$M_{22}(k) = \frac{e^{2ika}}{\sqrt{1+y^2}}\,[f_1(k) - if_2(k)] \tag{4.11}$$

eşitliği elde edilir. O halde $f_1(k) = 0$ ve $f_2(k) = 0$ olması $k^2 \in \mathbb{R}^+$ sayısının spektral singülerlik olmasına denktir.

$f_1(k) = 0$ olması durumunda

$$\begin{aligned} &\sqrt{1+y^2}\,|\cos(akw)|^2 - |\sin(akw)|^2 = 0 \\ \Rightarrow\;& |\sin(akw)|^2 = \sqrt{1+y^2}\,|\cos(akw)|^2 \\ \Rightarrow\;& |\tan(akw)|^2 = \sqrt{1+y^2} \end{aligned} \tag{4.12}$$

eşitliği elde edilir.

$f_2(k) = 0$ olması durumunda

$$\mathrm{Re}[\sqrt{1+iy}(2-iy)\cos(akw^*)\sin(akw)] = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+iy}(2-iy)\cos(akw^*)\sin(akw) = -\left[\sqrt{1+iy}(2-iy)\cos(akw^*)\sin(akw)\right]^*$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+iy}(2-iy)\cos(akw^*)\sin(akw) = -\sqrt{1-iy}(2+iy)\cos(akw)\sin(akw^*)$$

$$\Rightarrow \tan(akw) = -\frac{\sqrt{1-iy}(2+iy)}{\sqrt{1+iy}(2-iy)}\tan(akw^*)$$

$$\Rightarrow \tan^2(akw) = -\frac{\sqrt{1-iy}(2+iy)}{\sqrt{1+iy}(2-iy)}\,|\tan(akw)|^2$$

$$\Rightarrow \tan^2(akw) = -\frac{(1-iy)\,(2+iy)}{(2-iy)}$$

eşitliği bulunur.

$$\cos(2x) = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

eşitliği yardımıyla

$$\cos(2ak\sqrt{1-iy}) = -(1+4y^{-2}) + 2iy^{-1} \tag{4.13}$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca (4.13) ifadesi

$$q \;:\; = ak\sqrt{2\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)}sgn(y) \tag{4.14a}$$

$$r \;:\; = -ak\sqrt{2\left(\sqrt{1+y^2}+1\right)} \tag{4.14b}$$

tanımları yardımıyla

$$\cos r \cosh q \;=\; -(1+4y^{-2}) \tag{4.15a}$$

$$\sin r \sinh q \;=\; 2y^{-1} \tag{4.15b}$$

olarak da ifade edilebilir.

(4.15b) eşitliğinde $y^{-1}$ çözülüp (4.15a) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\cosh q = \frac{1}{2}\left[-1 \pm \sqrt{2\cos(2r)-1}\right]\csc r \cot r \tag{4.16}$$

ifadesi bulunur. Reelliğin sağlanması için $2\cos(2r) - 1 \geq 0$ olmalıdır. (4.15a) eşitliğinde de

$$cosr < 0$$

sağlanır. Bu durumda

$$|r-(2n+1)\pi| \leq \frac{\pi}{6} \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \tag{4.17}$$

olacaktır. Bu koşulla (4.16) eşitliğinde sağ taraf 1 den büyüktür. Dolayısıyla

$$q_{\pm}(r) := \cosh^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left[-1 \pm \sqrt{2\cos(2r)-1}\right]\csc r \cot r\right\} \tag{4.18}$$

olmak üzere $q = \pm q_{\pm}(r)$ olarak elde edilir.

(4.15b) eşitliğinde $q = \pm q_{\pm}(r)$ dikkate alındığında

$$y_{\pm}(r) := 2\left|\sin r \sinh q_{\pm}(r)\right|^{-1} \tag{4.19}$$

tanımı yardımıyla

$$y = \pm sgn(\sin r) y_{\pm}(r) \tag{4.20}$$

eşitliğine ulaşılır. (4.20) ifadesi (4.14a) ve (4.14b) eşitliklerinde yerine yazırlırsa

$$q = \pm ak\sqrt{2\left(\sqrt{1+y_{\pm}^2(r)}-1\right)}sgn(\sin r) \tag{4.21a}$$

$$r = -ak\sqrt{2\left(\sqrt{1+y_{\pm}^2(r)}+1\right)} \tag{4.21b}$$

olup

$$\widetilde{q}_{\pm}(r) := r sgn(\sin r)\sqrt{\frac{\sqrt{1+y_{\pm}^2(r)}-1}{\sqrt{1+y_{\pm}^2(r)}+1}} \tag{4.22}$$

olmak üzere $q = \pm\widetilde{q}_{\pm}(r)$ bulunur. Spektral singülerlikler $q_{\pm}(r) = \widetilde{q}_{\pm}(r)$ eşitliğini sağlayan $r$ değerlerine karşılık gelir. $q_{+}(r) = \widetilde{q}_{+}(r)$ olması halinde (4.17) koşulunu gerçekleyen hiç bir $r$ reel çözümü yokken $q_{-}(r) = \widetilde{q}_{-}(r)$ olması halinde (4.17) koşulunu herbir $n$ doğal sayısı için gerçekleyen $\pm r_n$ şeklinde iki tane çözüm vardır. (4.19) eşitliği (4.21b) ifadesinde dikkate alınır ve

$$a^2\zeta = (ak)^2 y \tag{4.23}$$

özdeşliği kullanılırsa

$$g(r) := \frac{r}{\sqrt{2\left[\sqrt{y_{-}^2(r)+1}+1\right]}} \tag{4.24}$$

olmak üzere $k = g(r)$ olup

$$a^2\zeta = \pm g^2(r) sgn(\sin r) y_{-}(r) \tag{4.25}$$

elde edilir. Bu bağıntılarda $r = \pm r_n$ olarak almak spektral singülerliklerle ilişkili olan $ak$ ve $a^2\zeta$ değerlerini verir. $ak$ ve $a^2\zeta$, $n > 0$ için $r$ ile $r_{-n} = -r_{n+1}$ değerlerinin tek fonksiyonu olduğundan, $k_{-n} = -k_{n+1}$ ve $\zeta_{-n} = -\zeta_{n+1}$ sağlanır. Burada ele alınan sistem için $a^2\zeta$ nın herbir değeri için en çok bir spektral singülerlik vardır.

# 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

İmpulsive denklemler, doğadaki canlı nüfusunun belirlenmesi, ekoloji, biyolojik sistemler, biyoteknoloji, farmakokinetik gibi konularda bazı problemlerin gözlenebilmesinin doğal bir sonucu olarak oluşmuş ve bu problemlerin modellenmesi için geliştirilmiştir. Gerçeğe yeterince yakın olarak tanımlanan her matematiksel model, değerleri yaklaşık olarak belirlenebilen bazı parametreler içerir. Bu nedenle parametrelerde ufak değişiklikler yapıldığında diferensiyel denklemin çözümlerinin özellikleri esas öneme sahip olacaktır. Bu çalışmada ele alınan impulsive denklemin çözümlerinin spektral singülerlikleri bu özellikler arasındadır.

## KAYNAKLAR


Adıvar, M. and Bairamov, E. 2001. Spectral properties of non-selfadjoint difference operators, J. Math. Anal. Appl. 261 no. 2, pp. 461–478.

Adıvar, M. and Bairamov, E. 2003. Difference equations of second order with spectral singularities, J. Math. Anal. Appl. 277, no. 2, pp. 714–721. 39A10.

Allahverdiev, B. P., Bairamov, E. and Uğurlu, E. 2013. Eigenparameter dependent Sturm-Liouville problems in boundary conditions with transmission conditions. J. Math. Anal. Appl. 401, no. 1, pp. 388–396.

Bairamov, E. and Coşkun, C. 2004. Jost solutions and the spectrum of the system of difference equations, Appl. Math. Lett. **17**, no. 9, pp. 1039–1045.

Bairamov, E. and Coşkun, C. 2005. The structure of the spectrum of a system of difference equations, Appl. Math. Lett. **18**, no.4, pp. 387–394.

Bairamov, E., Çakar, Ö. and Krall, A.M. 1999. An eigenfunction expansion for a quadratic pencil of a Schrödinger operator with spectral singularities, J. Differential Equations 151, no. 2, pp. 268–289.

Bairamov, E., Çakar, Ö. and Krall, A.M., 2001. Non-selfadjoint difference operators and Jacobi matrices with spectral singularities, Math. Nachr. 229, 5–14.

Bairamov, E. and Köprübaşı, T. 2010. Eigenparameter dependent discrete Dirac equations with spectral singularities, App. Math. Comput. 215, no. 12, 4216–4220. 39A10 (39A70).

Krall, A.M., Bairamov, E. and Çakar, Ö. 1999. Spectrum and spectral singularities of a quadratic pencil of a Schrödinger operator with a general boundary condition, J. Differential Equations 151, no. 2, pp. 252–267.

Kreyszig, E. 1978. Introductory Functional Analysis with Applications. Academic Press, 688, New York.

Lyance, V.E. 1967. A Differential Operator with Spectral Singularities, I, II. Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2, Vol. **60**, 185-225, pp. 227-283.

Marchenko, V.A. 1986. Sturm-Liouville Operators and Applications. AMS Chelsea Publishing, 391, Switzerland.

Mostafazadeh, A. 2009. Spectral Singularities of Complex Scattering Potentials and Infinite Reflection and Transmission Coefficients at Real Energies, Phys. Rev. Lett. **102**, 220402.

Mostafazadeh, A. 2010. Pseudo-Hermitian Representation of Quantum Mechanics, arXiv:0810.5643v4 [quant-ph].

Mostafazadeh, A. 2011. Spectral singularities of a general point interaction, J. Phys. A **44**, no. 37, 375302, p. 9.

Naimark, M.A. 1968. Linear Differential Operators I, II. Ungar, New York.

Uğurlu, E. and Bairamov, E. 2014. Spectral analysis of eigenparameter dependent boundary value transmission problems. J. Math. Anal. Appl. 413, no. 1, pp. 482–494.

# ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı** : Şeyda SOLMAZ

**Doğum Yeri** : Çankaya

**Doğum Tarihi** : 02/01/1989

**Medeni Hali** : Bekar

**Yabancı Dili** : İngilizce

**Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):**

**Lise** : Uluğbey Lisesi YDA (2003-2007)

**Lisans** : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi
Matematik Bölümü (2009-2013)

**Yüksek Lisans** : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı (Şubat 2014 - Ocak 2016)

**Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:**

**Yayınları:**