ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

IMPULSIVE GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Fatma KARAKOÇ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2007

ÖZET

Doktora Tezi

IMPULSIVE GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Fatma KARAKOÇ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.
İkinci bölümde gecikmeli diferensiyel denklemler, impulsive diferensiyel denklemler ve impulsive gecikmeli diferensiyel denklemlerle ilgili temel kavram ve sonuçlar ifade edilmiştir.
Bu çalışmanın orjinal bölümleri üçüncü ve dördüncü bölümde yer almaktadır.
Üçüncü bölümde birinci basamaktan lineer homogen olmayan impulsive gecikmeli diferensiyel denklem sistemi ve bir başlangıç fonksiyonundan meydana gelen problemin çözümünün $t \to \infty$ halinde bir sabit vektöre yakınsadığı ispatlanmıştır. Ayrıca bu sabit vektör, başlangıç fonksiyonu ve bir integral denklemin matris çözümü yardımı ile formüle edilmiştir.
Dördüncü bölümde aynı problemler, bu defa impulse koşullarının gecikmeler içermesi halinde incelenmiştir.

2007, 51 sayfa

Anahtar Kelimeler : Diferensiyel denklem, gecikmeli diferensiyel denklem, impulsive diferensiyel denklem, impulsive gecikmeli diferensiyel denklem, asimptotik sabitlik.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

IMPULSIVE DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Fatma KARAKOÇ

Ankara University
Graduate School of Natural And Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU

This thesis consists of four chapters.
The first chapter is devoted to the introduction.
In the second chapter, the basic concepts and results of delay differential equations, impulsive differential equations and impulsive delay differential equations are stated.
Original results are contained in the third and fourth chapters.
In the third chapter, a first order linear nonhomogeneous impulsive delay differential equations system with an initial function is considered and it is shown that the solution tends to a constant vector as $t \to \infty$. Moreover this constant vector is formulated in terms of the initial function and the matrix solution of an integral equation.
In the fourth chapter, the same problems are studied when the impulse conditions include delays.

2007, 51 pages

Key Words: Differential equation, delay differential equation, impulsive differential equation, impulsive delay differential equation, asymptotic constancy.

TEŞEKKÜR

Bana bu konuda araştırma imkanı veren, çalışmalarımın her safhasında emeği olan, değerli ilgi ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'na, tez izleme komitesi üyeleri olarak, tez izleme toplantıları boyunca olumlu uyarılarla katkıda bulunan Sayın Prof. Dr. Cevat KART (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'a ve Sayın Prof. Dr. Marat AKHMET (Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi)'e ve ayrıca daima destek ve güvenlerini hissettiren aileme teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Fatma KARAKOÇ
Ankara, Aralık 2007

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Son yıllarda lineer gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin yakınsaklığı ve asimptotik gösterimi problemi yoğun bir şekilde incelenmiştir. Yapılan çalışmalarda çoğunlukla birinci basamaktan skaler lineer gecikmeli

$$y'(t) = \alpha(t)[y(t) - y(t - \tau(t))] \tag{1.1}$$

diferensiyel denklemi ele alınmıştır.

Zhang (1981), $\tau(t) = 1$ olmak üzere (1.1) denkleminin çözümlerinin yapısını ve asimptotik davranışını incelemiştir. Haddock ve Sacker (1980) birinci basamaktan lineer gecikmeli

$$x'(t) = P(t)[x(t) - x(t - r)] + Q(t)x(t) + R(t)x(t - r)$$

diferensiyel denklem sisteminin her çözümünün $t \to \infty$ halinde bir sabit limite sahip olduğunu göstermişlerdir. Atkinson ve Haddock (1983) (1.1) denklemi ve daha genel olan durumlar için aynı problemi ele almışlardır. (1.1) denkleminin çözümlerinin asimptotik gösterimi Diblik (1998) tarafından hesaplanmıştır. Daha sonra yine Diblik (1999) (1.1) denkleminden daha genel olan

$$\dot{y}(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(t)[y(t) - y(t - \tau_j(t))]$$

denklemini ele almış ve çözümlerin yakınsaklığı için bazı yeter koşullar vermiştir. (1.1) denklemi bu defa Bastinec, Diblik ve Smarda (2000) tarafından göz önüne alınmış ve çözümlerin yakınsaklığı için yeni kriterler bulunmuştur.

Öte yandan $\tau(t) = \tau > 0$ (sabit) olmak üzere (1.1) denklemi pantograph

$$\dot{x}(t) = \beta(t)[x(t) - x(pt)] \tag{1.2}$$

denkleminin bir özel halidir. Gerçekten, bu denkleme $x(t) = y(\ln t)$ dönüşümü uygulanırsa, $\beta(t) = \dfrac{\alpha(t)}{t}$ ve $p = e^{-\tau}$ olmak üzere (1.1) denklemi elde edilir. Bu yüzden

(1.1) denklemine bir pantograph denklemi olarak bakılabilir. Pantograph denklemlerine elektrikli raylı sistemlerin sinyalizasyonu problemlerinde karşılaşıldığı bilinmektedir (Ockendon and Tayler 1971, Fox *et al.* 1971). Ayrıca, (1.1) şeklinde bir gecikmeli diferensiyel denklemin sayılar teorisi alanında bir uygulamaya sahip olduğu Mahler (1940) tarafından belirtilmektedir.

(1.2) denkleminin çözümlerinin asimptotik davranışı, $\beta(t) = a$ (sabit) halinde önce Kato ve McLeod (1971) ve daha sonra Carr ve Dyson (1974/75) tarafından incelenmiştir. Yirmi yıl aradan sonra, (1.2) denkleminin çözümlerinin serisel gösterimi ile asimptotiksel sınırları hesaplanmıştır (Terjeki 1995, Makay and Terjeki 1998).

Bu tezde aşağıdaki birinci basamaktan lineer homogen olmayan impulsive gecikmeli diferensiyel denklem sistemleri ele alınmakta ve bu sistemlerin çözümlerinin $t \to \infty$ halinde sabit bir vektöre yakınsadıkları gösterilmektedir. Daha sonra, bu sabit vektör, başlangıç fonksiyonu ve bir integral denklemin matris çözümü yardımiyle formüle edilmektedir:

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)[x(t) - x(t-\tau)] + f(t), \ t \geq t_0, \ t \neq \theta_i, \\ \Delta x(\theta_i) = B_i x(\theta_i) + D_i, \ i \in Z^+ = \{1, 2, ...\}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)[x(t) - x(t-\tau)] + f(t), \ t \geq t_0, \ t \neq \theta_i, \\ \Delta x(\theta_i) = B_i[x(\theta_i) - x(\theta_{i-m})] + D_i, \ i \in Z^+ = \{1, \ 2, ...\}. \end{cases}$$

Bu sistemlerin birincisinde impulse koşullarında gecikmeler bulunmamaktadır. Ancak ikincisinde impulse koşulları gecikmelere tabidir.

2. GECİKMELİ VE IMPULSIVE DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Bu bölümde gecikmeli diferensiyel denklemler, impulsive diferensiyel denklemler ve impulsive gecikmeli diferensiyel denklemlerle ilgili temel kavram ve sonuçlar ifade edilmektedir.

2.1 Gecikmeli Diferensiyel Denklemler

Bir gecikmeli diferensiyel denklem, bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerinin (en yüksek türev hariç) bir ya da daha çok gecikme argümentlerine bağlı olduğu bir diferensiyel denklem şeklinde tanımlanmaktadır. Aşağıdaki denklemler gecikmeli diferensiyel denklemler için birer örnektir:

$$x'(t) = 2x(t - \frac{3}{2}) - x(t-1),$$

$$x'(t) + x(t - \cos^2 t) = 1,$$

$$x'(t) = 5x(t) - 2x(\frac{t}{2}),$$

$$x''(t) + 3x'(t-2) - 7x(t-3) = 2t + 5.$$

Böylesi denklemlere literatürde ilk kez onsekizinci yüzyılın ikinci yarısında rastlanmış olmasına rağmen (Kondorse 1771), ancak 1950 yılından sonra A. D. Myshkis, E. M. Wright, R. Bellman ve diğer matematikçiler tarafından sistematik olarak incelenmeye başlanmıştır. Gecikmeli diferensiyel denklemler, fizik, mühendislik, ekonomi ve biyoloji alanlarında ortaya çıkan çok sayıda problem için model teşkil ederler. Uygulama alanlarının çokluğu, gecikmeli diferensiyel denklemleri matematiğin en hızlı gelişen dallarından biri haline getirmiştir. Son yıllarda gecikmeli diferensiyel denklemler literatürüne katılan bazı önemli kitaplar şunlardır: (Györi and Ladas 1991, Gopalsamy 1992, Hale and Lunel 1993, Kuang 1993).

Şimdi,

$$x'(t) = f(t, x_t), \ t \geq t_0, \tag{2.1.1}$$

gecikmeli diferensiyel denklemini ve

$$x(t) = \phi(t),\ t_0 - r \leq t \leq t_0, \tag{2.1.2}$$

başlangıç koşulunu ele alalım; burada $f : [t_0, \infty) \times C_D \rightarrow R^n;\ D \subset R^n$ açık bir alt küme ve $r \geq 0$ olmak üzere $C_D = C([-r, 0], D)$; $\phi \in C([t_0 - r, t_0], R^n)$; $C([a, b], R^n)$ sembolü, $\psi : [a, b] \rightarrow R^n$ şeklinde sürekli fonksiyonların uzayını göstermektedir.

Öte yandan, bu tez boyunca kullanılacak normlar şunlardır: $\xi \in R^n$ için

$$\|\xi\| = |\xi_1| + |\xi_2| + ... + |\xi_n|,$$

$A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ için

$$\|A\| = \max_{i=1,2,...,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

ve bir $t_0 \in R$ için $\phi \in C([t_0 - r, t_0], R^n)$ olmak üzere

$$\|\phi\|_r = \sup_{t_0 - r \leq t \leq t_0} \|\phi(t)\|.$$

(2.1.1) denklemindeki notasyona uygun olsun diye (2.1.2) başlangıç koşulu aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$x(t_0 + \sigma) = \phi(t_0 + \sigma),\quad -r \leq \sigma \leq 0,$$

ya da

$$x_{t_0} = \phi_{t_0}.$$

$\varphi = \phi_{t_0}$ alınırsa, (2.1.2) koşulu

$$x_{t_0} = \varphi \tag{2.1.2$'$}$$

şeklini alır. (2.1.2$'$) koşulu $t = t_0 + \sigma$ alınarak

$$x(t) = \varphi(t - t_0),\ t_0 - r \leq t \leq t_0, \tag{2.1.2$''$}$$

biçiminde yazılabilir.

Tanım 2.1.1. $x : [t_0 - r, t_0 + \beta) \to D \subset R^n,\ \beta > 0,$ fonksiyonu verilen bir $t_0 \in R$ için aşağıdaki koşulları sağlarsa, x fonksiyonuna $(2.1.1) - (2.1.2)$ başlangıç değer probleminin bir *çözümüdür* denir:

(i) $x(t),\ t_0 \leq t < t_0 + \beta$ için (2.1.1) denklemini sağlar,

(ii) $x(t) = \phi(t),\ t_0 - r \leq t \leq t_0.$

Tanım 2.1.2. $f(t, \varphi)$ fonksiyoneli verilen her sürekli $\varphi : [t_0 - r, t_0 + \beta) \to D$ fonksiyonu için $[t_0, t_0 + \beta)$ aralığında t ye göre sürekli ise, bu durumda f fonksiyoneline *süreklilik koşulunu sağlıyor* denir.

Lemma 2.1.1. $t_0 \in R$ ve $\alpha > 0$ için $x \in C([t_0 - r, t_0 + \alpha], R^n)$ ise, bu durumda $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ için

$$x_t(\sigma) = x(t + \sigma), \quad -r \leq \sigma \leq 0,$$

şeklinde tanımlı olan x_t fonksiyonu da süreklidir.

Lemma 2.1.2. Bir $t_0 \in R$ ve $\phi \in C([t_0 - r, t_0], R^n)$ için $f(t, \phi)$ fonksiyoneli süreklilik koşulunu sağlıyorsa, bu durumda $(2.1.1) - (2.1.2)$ başlangıç değer problemi

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t), & t_0 - r \leq t \leq t_0, \\ \phi(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x_s)ds, & t \geq t_0, \end{cases}$$

integral denklemine eşdeğerdir.

Tanım 2.1.3. $J = [t_0, \beta)$ olmak üzere $f : J \times C_D \to R^n$ ve $\Omega \subset J \times C_D$ olsun. Her (t, φ) ve $(t, \overline{\varphi}) \in \Omega$ için

$$\|f(t, \varphi) - f(t, \overline{\varphi})\| \leq K \|\varphi - \overline{\varphi}\|_r$$

sağlanacak şekilde pozitif bir K sabiti mevcutsa, f fonksiyoneline Ω üzerinde K Lipschitz sabitli bir *Lipschitz koşulunu* sağlıyor veya f Lipschitziandır denir.

Teorem 2.1.1. $f : J \times C_D \to R^n$ fonksiyoneli süreklilik koşulunu ve $J \times C_D$ nin her kompakt alt kümesi üzerinde φ ye göre bir lokal Lipschitz koşulunu sağlasın. Bu durumda her bir $(t_0, \varphi) \in J \times C_D$ için $(2.1.1) - (2.1.2)$ başlangıç değer probleminin $[t_0 - r, t_0 + \alpha),\ \alpha > 0,$ üzerinde tanımlı bir tek çözümü vardır.

2.2 Impulsive Diferensiyel Denklemler

Belli anlarda sıçramalara sahip olan bir reel fiziksel olayın matematiksel modeli çoğunlukla impulsive diferensiyel denklemleri ihtiva eder. Impulsive diferensiyel denklemler teorik ve mekanik fizikte, nüfus dinamiğinde, biyoloji ve ekonomi gibi alanlarda pek çok uygulamaya sahiptir. Böylesi denklemlere ilk kez, 1937 yılında bir saat modelinde karşılaşılmış olmasına rağmen (Samoilenko and Perestyuk 1995), impulsive diferensiyel denklemler hakkındaki eserler daha çok son 25 yıllık çalışmaların ürünleridir (Lakshmikantham *et al.* 1989, Bainov and Simeonov 1995).

Impulsive diferensiyel denklemlerde çözümler, sonlu ya da sonsuz sayıda noktada parçalı sürekli olup başka her yerde sürekli fonksiyonlardır. Bu tür süreksizlik noktalarına *impulse noktaları* denir ve genellikle $\theta_1,\ \theta_2, ...$ ile gösterilirler.

Genel olarak birinci basamaktan bir impulsive diferensiyel denklem sistemi

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)),\ t \neq \theta_i, \\ \Delta x(\theta_i) = I_i(x(\theta_i)),\ i \in Z, \end{cases} \tag{2.2.1}$$

şeklindedir; burada $f : \Omega \to R^n,\ \Omega \subset R \times R^n$ açık bir alt cümle, $I_i : D \to R^n,\ D \subset R^n$ açık bir alt cümle, $\Delta x(\theta_i) = x(\theta_i^+) - x(\theta_i^-)$ olup $x(\theta_i^+) = \lim\limits_{t \to \theta_i^+} x(t)$ ve $x(\theta_i^-) = \lim\limits_{t \to \theta_i^-} x(t)$ dir. (2.2.1) sisteminin $x(t)$ çözümünün $t = \theta_i,\ i \in Z,$ noktalarında soldan sürekli olduğu (yani $x(\theta_i^-) = x(\theta_i)$) kabul edilmektedir. Ayrıca burada $\{\theta_i\},\ i \in Z,$ artan bir dizi, yani her $i \in Z$ için $\theta_i < \theta_{i+1}$, ve $\lim\limits_{i \to \infty} \theta_i = \infty$ dur.

(2.2.1) sistemini

$$x(t_0^+) = x_0 \tag{2.2.2}$$

başlangıç koşulu ile birlikte göz önüne alalım.

Tanım 2.2.1. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $x : [t_0, t_0+\alpha) \to R^n,\ \alpha > 0,$ fonksiyonuna (2.2.1) – (2.2.2) başlangıç değer probleminin *çözümüdür* denir:

(i) $x(t_0^+) = x_0$ ve $t \in [t_0,\ t_0 + \alpha)$ için $(t, x(t)) \in \Omega$,

(ii) $t \in [t_0,\ t_0 + \alpha),\ t \neq \theta_i,\ i \in Z$, için $x(t)$ sürekli diferensiyellenebilir olup
$x'(t) = f(t, x(t))$,

(iii) $t = \theta_i$ noktalarında $x(t)$ soldan sürekli olup $x(\theta_i^+) = x(\theta_i) + I_i(x(\theta_i))$.

Belirtelim ki $t_0 \neq \theta_i$ ise, bu durumda (2.2.2) koşulu

$$x(t_0) = x_0 \tag{2.2.2'}$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek 2.2.1. Birinci basamaktan skaler

$$\begin{cases} x'(t) = 1, \quad t \neq \theta_i, \\ \Delta x(t) = \dfrac{1}{x(t)},\ t = \theta_i = i,\ i = 1, 2, \end{cases} \tag{2.2.3}$$

impulsive diferensiyel denklemini

$$x(0) = 0 \tag{2.2.4}$$

başlangıç koşulu ile birlikte göz önüne alalım ve $[0, 3]$ üzerindeki çözümünü bulalım.

$[0, 1]$ üzerinde (2.2.3) – (2.2.4) başlangıç değer probleminin çözümü

$$x(t) = t.$$

(2.2.3) deki impulse koşulundan,

$$x(1^+) = 2 \tag{2.2.5}$$

olup $(2.2.3), (2.2.5)$ probleminin çözümü $t \in (1, 2]$ için

$$x(t) = t + 1$$

dir. Yine (2.2.3) deki impulse koşulundan

$$x(2^+) = \frac{10}{3} \tag{2.2.6}$$

olur ve dolayısiyle $(2.2.3), (2.2.6)$ probleminin $2 < t \leq 3$ aralığındaki çözümü

$$x(t) = t + \frac{4}{3}$$

şeklinde bulunur.

Böylece $(2.2.3) - (2.2.4)$ probleminin $0 \leq t \leq 3$ aralığı üzerindeki çözümü

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1, \\ t+1, & 1 < t \leq 2, \\ t + \frac{4}{3}, & 2 < t \leq 3. \end{cases}$$

2.3 Impulsive Gecikmeli Diferensiyel Denklemler

Impulsive gecikmeli diferensiyel denklemler teorisi, bazı teknik zorluklar sebebiyle gerek impulsive diferensiyel denklemlere ve gerekse gecikmeli diferensiyel denklemlere göre daha az gelişmiştir. Örneğin, gecikmeli diferensiyel denklemler teorisinde $x(t)$ fonksiyonunun sürekli olması x_t fonksiyonelinin sürekli olmasını ifade ederken, impulsive gecikmeli diferensiyel denklemlerde durum böyle değildir. $x(t)$ parçalı sürekli bir fonksiyon olduğu zaman, x_t fonksiyoneli parçalı sürekli olmayabilir. Bu yüzden $f(t, \psi)$ iki değişkene göre sürekli olsa bile, $x(t)$ parçalı sürekli bir fonksiyon olduğunda $f(t, x_t)$ bileşke fonksiyonu hakkında birşey söylenemez.

Impulsive gecikmeli diferensiyel denklemlerle ilgili ilk makale Gopalsamy ve Zhang tarafından 1989 yılında yayınlanmıştır. Bu makalede birinci basamaktan bir impulsive gecikmeli diferensiyel denklemin sıfır çözümünün asimptotik kararlılığı ile salınımlı ve salınımsız çözümlerinin varlığı için yeter koşullar elde edilmiştir. Impulsive gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümleri için varlık ve teklik konusu daha çok Ballinger ve Liu (1999, 2002, 2004) tarafından incelenmiştir. Ayrıca, böylesi denklemlerin çözümlerinin sınırlılığı, kararlılığı, salınımlılığı ve periyodik çözümlerinin varlığı farklı matematikçiler için başlıca araştırma konuları olmuştur (Yu and Zhang 1996, Berezansky and Braverman 1996, Zhao and Yan 1996, 1997, Yu 2001, Tang *et al.* 2002). Şimdi bu makalelerdeki bazı önemli sonuçlardan söz edelim.

Gopalsamy ve Zhang (1989),

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t-\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x(t_i-)\delta(t-t_i),\ t \neq t_i, \tag{2.3.1}$$

ve

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} + p(t)x(t-\tau) = 0,\ t \neq t_i, \\ x(t_i^+) - x(t_i^-) = b_i x(t_i^-) \end{cases} \tag{2.3.2}$$

denklemlerini ele almışlar ve bunlar için aşağıdaki sonuçları ispatlamışlardır; burada b_i $(i = 1, 2, ...)$ reel sabitler, a pozitif bir sabit, $\tau \geq 0$ reel sabit, $0 < t_1 < t_2 < ... < t_i < ...$ olup $\lim\limits_{i\to\infty} t_i = \infty$.

Teorem 2.3.1. Aşağıdaki koşullar sağlansın:

(i) $0 < a\tau < \pi/2$,

(ii) $t_{i+1} - t_i \geq T > 0,\ i = 1, 2, ...,\ \tau < T$,

(iii) $1 + |b_i| \leq M,\ i = 1, 2, ...$,

(iv) $(1/T)\ln M < \alpha,\ \alpha < \alpha_0$.

Bu durumda (2.3.1) denkleminin sıfır çözümü global üstel asimptotik kararlıdır.

Teorem 2.3.2. Aşağıdaki koşullar sağlansın:

(i) $p,\ [0, \infty)$ üzerinde sürekli ve $t \geq 0$ için $p(t) \geq 0$,

(ii) $t_{i+1} - t_i \geq T,\ i = 1, 2, ...,$

(iii) $\tau \geq T$ ise,

$$\lim_{i\to\infty} \sup(1 + b_i)^{-1} \int\limits_{t_i}^{t_i+T} p(s)ds > 1,$$

$0 < \tau < T$ ise,

$$\lim_{i\to\infty} \sup(1 + b_i)^{-1} \int\limits_{t_i}^{t_i+\tau} p(s)ds > 1.$$

Bu durumda (2.3.2) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.

Teorem 2.3.3. Aşağıdaki koşullar sağlansın:

(i) $t_{i+1} - t_i \geq T,\ i = 1, 2, ...,$ ve $\tau < T$,

(ii) $0 \leq b_i \leq M,\ i = 1, 2, ...,$

(iii) $p,\ [0, \infty)$ üzerinde sürekli ve $t \geq 0$ için $p(t) \geq 0$,

(iv)

$$\lim_{i\to\infty} \inf \int\limits_{t-\tau}^{t} p(s)ds > \frac{1 + M}{e}.$$

Bu durumda (2.3.2) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Teorem 2.3.4. (2.3.2) denkleminin parametreleri aşağıdaki koşulları sağlasın:

(i) $a\tau e \leq 1 - c$ olacak şekilde bir pozitif c sabiti mevcuttur,

(ii) $b_i > 0,\ i = 1, 2, ...,$ ve $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i < \infty.$

Bu durumda (2.3.2) denklemi bir salınımsız çözüme sahiptir.

Yu ve Zhang (1996), impulsive gecikmeli

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t - \tau)),\ t \geq t_0,\ t \neq t_k, \\ x(t_k^+) - x(t_k) = I_k(x(t_k)),\ k \in N, \end{cases} \tag{2.3.3}$$

denklemini ele almışlardır, burada $\tau > 0$, $I_k : R \to R$, $f \in C([t_0, \infty) \times R, R)$, $t_0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_k < t_{k+1} < ...$, $k \to \infty$ halinde $t_k \to \infty$ dur; $x'(t)$, $x(t)$ nin soldan türevini göstermektedir; $f(t,0) \equiv 0$ ve $I_k(0) \equiv 0$ dır. Ayrıca

$$0 \leq -xf(t,x) \leq P(t)x^2, \ t \geq t_0, \ |x| < H, \tag{2.3.4}$$

sağlanacak şekilde bir $H > 0$ sabiti ve $P : [t_0, \infty) \to [0, \infty)$ sürekli fonksiyonu mevcut olsun. Bu makalede (2.3.3) denkleminin sıfır çözümünün düzgün kararlılığı ve asimptotik kararlılığı ile ilgili olarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

Teorem 2.3.5. $k \in N$ için $t_{k+1} - t_k > \tau$ olsun. Ayrıca (2.3.4) eşitsizliği ve aşağıdaki koşullar sağlansın:

$$0 \geq xI_k(x) \geq -bx^2, \ |x| < H, \ k \in N, \tag{2.3.5}$$

$$\int_{t-\tau}^{t} P(s)ds \leq \frac{3}{2} - b(2 - \frac{b}{2}), \ t \geq t_0 + \tau. \tag{2.3.6}$$

Bu durumda (2.3.3) denkleminin sıfır çözümü düzgün kararlıdır.

Teorem 2.3.6. $(2.3.5), (2.3.6)$ koşulları ile birlikte aşağıdaki koşullar sağlansın:

$$\int_{t-\tau}^{t} P(s)ds \leq \alpha < \frac{3}{2} - b(2 - \frac{b}{2}), \ t \geq t_0 + \tau,$$

sınırlı ve parçalı sürekli olan x fonksiyonu için $\lim_{t \to \infty} x(t) > 0$ olmak üzere

$$\int_{t_0}^{\infty} f(t, x(t-\tau))dt = -\infty, \quad \int_{t_0}^{\infty} f(t, -x(t-\tau))dt = \infty.$$

Bu durumda (2.3.3) denkleminin sıfır çözümü düzgün kararlı ve asimptotik kararlıdır.

Zhao ve Yan (1996), skaler

$$\begin{cases} x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t)x(t-\tau_i) = 0, \ t \neq t_k, \\ x(t_k^+) - x(t_k) = b_k x(t_k), \ k = 1, 2, ... \end{cases} \tag{2.3.7}$$

impulsive gecikmeli diferensiyel denkleminin salınımlı ve salınımsız çözümlerinin davranışları hakkında aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Teorem 2.3.7.

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^+ < \infty$$

ve yeterince büyük t için aşağıdaki koşullar sağlansın:

$$|p_i(t)| \leq A, \ i = 1, 2, .., n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t + \tau_i) \geq B,$$

$$\sum_{\tau_i < r} \int_{t-r}^{t-\tau_i} p_i^-(s + \tau_i) ds + \sum_{\tau_i > r} \int_{t-\tau_i}^{t-r} p_i^+(s + \tau_i) ds \leq \alpha < 1,$$

burada $b_k^+ = \max\{b_k, 0\}, \ p_i^+(s) = \max\{p_i(s), 0\}$ ve $p_i^-(s) = \max\{-p_i(s), 0\}$ dır.

Bu durumda (2.3.7) denkleminin her salınımsız çözümü $t \to \infty$ için sıfıra yaklaşır.

Teorem 2.3.8. Aşağıdaki koşullar sağlansın:

$$\sum_{i=1}^{n} |b_k| < \infty,$$

pozitif $Q_1, \ Q_2$ sabitleri için

$$Q_1 + Q_2 < 1,$$

yeterince büyük t için

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t + \tau_i) \neq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{t-\tau_i}^{t} |p(s + \tau_i)| \, ds \leq Q_1,$$

ve $r \in [0, \tau_n]$ için

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{t-r}^{t-\tau_i} sgn(r - \tau_i) \, |p_i(s + \tau_i)| \, ds \leq Q_2.$$

Bu durumda (2.3.7) denkleminin her salınımlı çözümü $t \to \infty$ halinde sıfıra yaklaşır.

Teorem 2.3.9. (2.3.7) nin tüm çözümleri sınırlı ise, sıfır çözümü kararlıdır.

Zhao ve Yan (1997) daha sonra (2.3.7) denklemini

$$x(t) = \phi(t), \; t \in [\sigma - \tau, \sigma], \tag{2.3.8}$$

başlangıç koşulu ile birlikte ele almışlar ve aşağıdaki sonucu ispatlamışlardır, burada $\sigma \geq 0, \; \phi \in PC_\sigma$,

$$PC_\sigma = \{x : [\sigma - \tau, \sigma] \to R \,|t \in [\sigma - \tau, \sigma] \backslash \{t_k, \; k = 1, 2, ...\} \text{ için } x(t) \text{ sürekli,}$$
$$t_k \in [\sigma - \tau, \sigma] \text{ için } x(t_k^+), \; x(t_k^-) \text{ mevcut ve } x(t_k^-) = x(t_k)\big\} \text{ dır.}$$

Teorem 2.3.10. $\sigma \geq 0, \; \phi \in PC_\sigma$ ve $\phi(\sigma) > 0$ olsun. Bu durumda (2.3.7) – (2.3.8) başlangıç değer probleminin çözümünün $[\sigma, T)$ üzerinde pozitif olması için gerek ve yeter koşul

$$\lambda(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t) \prod_{H_i(t) \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} \frac{\phi(h_i(t))}{\phi(\sigma)} \exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t} \lambda(s)ds\right) = 0 \tag{2.3.9}$$

integral denkleminin bir $\lambda \in PC[\sigma, T)$ çözümüne sahip olmasıdır, burada $\sigma < T \leq \infty, \; h_i(t) = \min\{\sigma, t - \tau_i\}$ ve $H_i(t) = \max\{\sigma, t - \tau_i\}$ dir.

(2.3.9) integral denkleminin çözümlerinin varlığı için aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Teorem 2.3.11. Bir $\delta \in PC[\sigma, T)$ fonksiyonu için

$$\alpha(t) \leq \delta(t) \leq \beta(t), \; t \in [\sigma, T),$$

ve

$$\alpha(t) \leq -\sum_{i=1}^{n} p_i(t) \prod_{H_i(t) \leq t_k < 1} (1 + b_k)^{-1} \frac{\phi(h_i(t))}{\phi(\sigma)} \exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t} \delta(s)ds\right) \leq \beta(t)$$

sağlanacak şekilde $\alpha,\ \beta \in PC[\sigma, T)$ fonksiyonları mevcut olsun. Bu durumda (2.3.9) denklemi

$$\alpha(t) \leq \lambda(t) \leq \beta(t),\ t \in [\sigma, T),$$

olacak şekilde bir $\lambda \in PC[\sigma, T)$ çözümüne sahiptir.

Teorem 2.3.10 ve Teorem 2.3.11 kullanılarak (2.3.7) denkleminin salınımsız çözümlerinin varlığı için aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Teorem 2.3.12.

$$\sum_{i=1}^{n} |p_i(t)| \prod_{H_i(t) \leq t_k < t} (1+b_k)^{-1} e^{\mu \tau_i} \leq \mu,\ t \geq \sigma,$$

sağlanacak şekilde $\sigma \geq 0$ ve $\mu > 0$ sabitleri mevcut olsun. Bu durumda (2.3.7) denklemi bir tek pozitif $x \in \Omega(\sigma)$ çözümüne sahiptir, burada

$$\begin{aligned}\Omega(\sigma) = \{x : [\sigma - \tau, \infty) \to R \,|t \neq t_k \text{ için } x(t) \text{ sürekli, } t \geq \sigma,\ t \neq t_k,\ t \neq t_k + \tau_i \text{ için} \\ x(t_k^+),\ x(t_k^-) \text{ mevcut, } x(t_k) = x(t_k^-),\ x(t) \text{ diferensiyellenebilir ve } x'(t_k^+), \\ x'(t_k^-),\ x'(t_k + \tau_i^+),\ x'(t_k + \tau_i^-) \text{ mevcut}\big\}.\end{aligned}$$

Teorem 2.3.13.

$$\tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_n$$

olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{m} p_i(t) \prod_{H_i(t) \leq t_k < t} (1+b_k)^{-1} \leq 0,\ t \in [\sigma, \infty),\ m = 1, 2, ..., n,$$

sağlanacak şekilde $\sigma \geq 0$ mevcut olsun. Bu durumda (2.3.7) denklemi sonuçta pozitif bir çözüme sahiptir.

Teorem 2.3.14.

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{H_i(t)}^{t} p_i^+(s) \prod_{H_i(s) \leq t_k < s} (1+b_k)^{-1} ds \leq \frac{1}{e},\ t \in [\sigma, \infty),$$

sağlanacak şekilde $\sigma \geq 0$ mevcut olsun. Bu durumda (2.3.7) denklemi salınımsız bir çözüme sahiptir, burada $p_i^+(s) = \max\{0, p_i(s)\}$, $i = 1, 2, ..., n$.

Son yıllarda impulsive gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin kararlılığı ve sınırlılığı da yoğun bir şekilde incelenmektedir.

Yu (2001), skaler impulsive gecikmeli

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x(.)), \ t \geq 0, \ t \neq t_k, \\ x(t_k^+) - x(t_k) = I_k(x(t_k)), \ k \in N = \{1, 2, ...\}, \end{cases} \tag{2.3.10}$$

diferensiyel denklemini ele almıştır, burada $t \geq 0$ ve $\phi \in PC(t)$ olmak üzere $F(t, \phi)$ bir sürekli fonksiyoneldir; $PC(t)$ ile $[g(t), t]$ üzerinde tanımlı, sınırlı ve soldan sürekli fonksiyonların sınıfı kastedilmektedir, $g : [0, \infty) \to R$ sürekli, azalmayan bir fonksiyon olup $t \geq 0$ için $g(t) \leq t$ ve $g(t) \to \infty$; $I_k : R \to R$; $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_k < t_{k+1} < ...,$ $k \to \infty$ için $t_k \to \infty$ ve $\beta > 0,\ t \geq 0$ için

$$PC_\beta(t) = \left\{ \phi \in PC(t) : \|\phi\|_t = \sup_{s \in [g(t), t]} |\phi(s)| < \beta \right\}.$$

Bu makalede (2.3.10) denkleminin sıfır çözümünün kararlılığı incelenmiş ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 2.3.15. $p : [0, \infty) \to [0, \infty)$ sürekli bir fonksiyon, $H > 0$ sabit ve $M_t(\phi) = \max \left\{ 0, \sup_{s \in [g(t), t]} \phi(s) \right\}$ olmak üzere

$$p(t) M_t(\phi) \geq -F(t, \phi) \geq -p(t) M_t(-\phi), \ t \geq 0, \ \phi \in PC_H(t), \tag{2.3.11}$$

sağlansın. Ayrıca

$$b_k x^2 \leq x[x + I_k(x)] \leq x^2, \ k \in N, \ |x| < H, \tag{2.3.12}$$

ve

$$\int_{g(t)}^{t} p(s) \prod_{g(s)\leq t_k<s} b_k^{-1} ds \leq \frac{3}{2},\ t \geq t^* = \min\{t \geq 0 : g(t) \geq 0\},$$

sağlanacak şekilde pozitif sayıların bir $\{b_k\}$, $b_k \leq 1$, dizisi mevcut olsun. Bu durumda (2.3.10) denkleminin sıfır çözümü kararlıdır.

Teorem 2.3.16. (2.3.11), (2.3.12) koşulları ve

$$\int_{g(t)}^{t} p(s) \prod_{g(s)\leq t_k<s} b_k^{-1} ds \leq \alpha < \frac{3}{2},\ t \geq t^*,$$

sağlansın. Ayrıca $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) > 0$ olmak üzere her sınırlı ve soldan sürekli $x : [0,\infty) \to R$ fonksiyonu için

$$\int_{0}^{\infty} F(t, x(.))dt = -\infty \text{ ve } \int_{0}^{\infty} F(t, -x(.))dt = \infty$$

olsun. Bu durumda (2.3.10) denkleminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır.

Bu makalede ayrıca lineer impulsive gecikmeli diferensiyel

$$\begin{cases} x'(t) + \sum\limits_{i=1}^{n} p_i(t)x(t-\tau_i) = 0,\ t \geq 0,\ t \neq t_k, \\ x(t_k^+) - x(t_k) = b_k x(t_k),\ k \in N, \end{cases} \tag{2.3.13}$$

denklemi de ele alınmıştır, burada $\tau_i \geq 0,\ p_i \in C(R^+, R^+),\ i = 1, 2, ..., n$ ve $\{b_k\}$ reel sayıların bir dizisidir.

Aşağıdaki teoremlerde (2.3.13) denkleminin sıfır çözümünün kararlılığı ile impulse nokta içermeyen gecikmeli

$$y'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t) \prod_{t-\tau_i\leq t_k<t} (1+b_k)^{-1} y(t-\tau_i) = 0 \tag{2.3.14}$$

denkleminin sıfır çözümünün kararlılığı arasındaki ilişki ifade edilmektedir.

Teorem 2.3.17.

$$0 < \prod_{j=m}^{l} |1 + b_j| \leq \beta, \; l \geq m \geq 0,$$

sağlanacak şekilde $\beta > 0$ sabiti mevcut olsun. (2.3.14) denkleminin sıfır çözümü düzgün kararlı ise, bu durumda (2.3.13) denkleminin sıfır çözümü de düzgün kararlıdır.

Teorem 2.3.18.

$$\alpha \leq \prod_{j=m}^{l} |1 + b_j| \leq \beta, \; l \geq m \geq 0,$$

sağlanacak şekilde pozitif α ve β sabitleri mevcut olsun. (2.3.13) denkleminin sıfır çözümünün düzgün kararlı olması için gerek ve yeter koşul (2.3.14) denkleminin sıfır çözümünün düzgün kararlı olmasıdır.

3. IMPULSIVE GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERDE ÇÖZÜMÜN ASİMPTOTİKSEL SABİTLİK DURUMU

3.1 Giriş

Bu bölümde lineer homogen olmayan impulsive gecikmeli

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)[x(t) - x(t-\tau)] + f(t), \ t \geq t_0, \ t \neq \theta_i, \\ \Delta x(\theta_i) = B_i x(\theta_i) + D_i, \ i \in Z^+ = \{1, 2, ...\}, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

diferensiyel denklemi ele alınmaktadır, burada $i \in Z^+$ için $\theta_i = t_0 + i\tau$; $t_0 \geq 0$, $\tau > 0$; $\Delta x(\theta_i) = x(\theta_i^+) - x(\theta_i^-)$; $x(\theta_i^+) = \lim\limits_{t \to \theta_i^+} x(t)$ ve $x(\theta_i^-) = \lim\limits_{t \to \theta_i^-} x(t) = x(\theta_i)$ dir.

Ayrıca aşağıdaki koşullar kabul edilmektedir:

$(H1)$ $A : [t_0, \infty) \to R^{n \times n}$ sürekli bir matris fonksiyondur,

$(H2)$ $f : [t_0, \infty) \to R^n$ sürekli bir vektör fonksiyondur,

$(H3)$ $B_i \in R^{n \times n}$, $\det(I + B_i) \neq 0$, $i \in Z^+$; burada I, $n \times n$ boyutlu birim matristir,

$(H4)$ $D_i \in R^n$, $i \in Z^+$.

Uyarı 3.1.1. $\theta_i = t_0 + i\tau$ için $\lim\limits_{i \to \infty} \theta_i = \infty$ ve $t_0 < \theta_1 < \theta_2 < ... < \theta_i < \theta_{i+1} < ...$ dir.

(3.1.1) denklemi

$$x(t) = \phi(t), \ t \in [t_0 - \tau, t_0], \tag{3.1.2}$$

başlangıç koşulu ile birlikte ele alınmaktadır; burada $\phi : [t_0 - \tau, t_0] \to R^n$ sürekli bir başlangıç fonksiyonu olup $\|\phi\|_r = \sup\limits_{t_0 - r \leq t \leq t_0} \|\phi(t)\|$, $r \geq 0$, $\xi \in R^n$ için $\|\xi\| = |\xi_1| + |\xi_2| + ... + |\xi_n|$ ve $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ için $\|A\| = \max\limits_{i=1,2,...,n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ dir.

$a, b \in R$ olmak üzere $PLC([a, b], R^n)$ uzayı $t \in [a, b]$, $t \neq \theta_i$, $i \in Z^+$, için sürekli ve $\theta_i \in [a, b]$ noktalarında birinci çeşit süreksizliğe sahip soldan sürekli $\varphi : [a, b] \to R^n$ fonksiyonların sınıfını göstermektedir.

Tanım 3.1.1. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $x \in PLC([t_0-\tau, t_0+\beta), D)$, $\beta > 0$, $D \subset R^n$, fonksiyonuna $(3.1.1)-(3.1.2)$ başlangıç değer probleminin *çözümüdür* denir:

$(A1)$ $t \neq \theta_i,\ i \in Z^+,$ olmak üzere $t \in [t_0, t_0+\beta)$ için x in türevi mevcut ve süreklidir,

$(A2)$ x, $t \in [t_0, t_0+\beta), t \neq \theta_i$, için (3.1.1) deki gecikmeli diferensiyel denklemi sağlar,

$(A3)$ x, $t = \theta_i,\ i \in Z^+$, noktalarında (3.1.1) deki impulse koşullarını sağlar,

$(A4)$ $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ için $x(t) = \phi(t)$.

Öte yandan, $(3.1.1) - (3.1.2)$ probleminin $x(t)$ çözümü için aşağıdaki integral denklemin sağlandığını not edelim:

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \\ x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} A(s)x(s)ds - \int\limits_{t_0}^{t} A(s)x(s-\tau)ds + \int\limits_{t_0}^{t} f(s)ds & \\ \quad + \sum\limits_{t_0<\theta_i<t} B_i x(\theta_i) + \sum\limits_{t_0<\theta_i<t} D_i, & t \geq t_0. \end{cases} \tag{3.1.3}$$

Bu arada hem bu bölümde hem de sonraki bölümde gerek duyulan ve iyi bilinen bir lemmadan söz edelim.

Lemma 3.1.1 (Samoilenko and Perestyuk 1995)**.** Negatif olmayan parçalı sürekli $u(t)$ fonksiyonu her $t \geq t_0$ için

$$u(t) \leq c + \int\limits_{t_0}^{t} b(s)u(s)ds + \sum_{t_0<t_i<t} \beta_i u(t_i)$$

eşitsizliğini sağlasın, burada $c \geq 0,\ \beta_i \geq 0,\ b(s) > 0,$ ve t_i ler $u(t)$ fonksiyonunun birinci çeşit süreksizliğe sahip olduğu noktalardır. Bu durumda her $t \geq t_0$ için

$$u(t) \leq c \prod_{t_0<t_i<t} (1+\beta_i) \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} b(s)ds \right).$$

3.2 Çözümün Yakınsaklığı

Bu kesimde $(3.1.1)-(3.1.2)$ başlangıç değer probleminin $x(t)$ çözümünün $t\to\infty$ halinde yakınsak olduğu gösterilecektir.

Teorem 3.2.1. $(H1)-(H4)$ hipotezlerine ek olarak aşağıdaki koşullar sağlansın:

(i) $\int\limits_{t_0}^{\infty}\|A(s)\|\,ds\le K_1<\infty,$

(ii) $\int\limits_{t_0}^{\infty}\|f(s)\|\,ds\le K_2<\infty,$

(iii) $\prod\limits_{i=1}^{\infty}(1+\|B_i\|)\le L_1<\infty,$

(iv) $\prod\limits_{i=1}^{\infty}(1+\|D_i\|)\le L_2<\infty.$

Bu durumda $(3.1.1)-(3.1.2)$ probleminin $x(t)$ çözümü $t\to\infty$ halinde sabit bir vektöre yakınsar, yani, $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=l(\phi)\in R^n$ dir.

İspat. x, $(3.1.1)-(3.1.2)$ probleminin tek çözümü olsun. Bu durumda (3.1.3) den,

$$\|x(t)\|\le\|x(t_0)\|+\int\limits_{t_0}^{t}\|A(s)\|\,\|x(s)\|\,ds+\int\limits_{t_0}^{t}\|A(s)\|\,\|x(s-\tau)\|\,ds$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\|f(s)\|\,ds+\sum_{t_0<\theta_i<t}\|B_i\|\,\|x(\theta_i)\|+\sum_{t_0<\theta_i<t}\|D_i\|\,,\ t\ge t_0,$$

elde edilir. Bu eşitsizlik aşağıdaki şekilde tekrar düzenlenebilir:

$$\|x(t)\|\le\|x(t_0)\|+\int\limits_{t_0}^{t}\|A(s)\|\,\|x(s)\|\,ds+\int\limits_{t_0-\tau}^{t-\tau}\|A(s+\tau)\|\,\|x(s)\|\,ds$$

$$+\int_{t_0}^{t}\|f(s)\|\,ds+\sum_{t_0<\theta_i<t}\|B_i\|\,\|x(\theta_i)\|+\sum_{t_0<\theta_i<t}\|D_i\|$$

$$=\|x(t_0)\|+\int_{t_0}^{t}\|A(s)\|\,\|x(s)\|\,ds+\int_{t_0-\tau}^{t_0}\|A(s+\tau)\|\,\|x(s)\|\,ds$$

$$+\int_{t_0}^{t}\|A(s+\tau)\|\,\|x(s)\|\,ds-\int_{t-\tau}^{t}\|A(s+\tau)\|\,\|x(s)\|\,ds$$

$$+\int_{t_0}^{t}\|f(s)\|\,ds+\sum_{t_0<\theta_i<t}\|B_i\|\,\|x(\theta_i)\|+\sum_{t_0<\theta_i<t}\|D_i\|$$

$$\leq\|x(t_0)\|+\int_{t_0}^{t}(\|A(s)\|+\|A(s+\tau)\|)\,\|x(s)\|\,ds+\int_{t_0}^{t}\|f(s)\|\,ds$$

$$+\|\phi\|_\tau\int_{t_0-\tau}^{t_0}\|A(s+\tau)\|\,ds+\sum_{t_0<\theta_i<t}\|B_i\|\,\|x(\theta_i)\|+\sum_{t_0<\theta_i<t}\|D_i\|\,.$$

Buradan (i), (ii) ve (iv) koşulları kullanılarak $t\geq t_0$ için

$$\|x(t)\|\leq c+\int_{t_0}^{t}(\|A(s)\|+\|A(s+\tau)\|)\,\|x(s)\|\,ds+\sum_{t_0<\theta_i<t}\|B_i\|\,\|x(\theta_i)\|$$

elde edilir, burada

$$c=\|\phi(t_0)\|+K_1\,\|\phi\|_\tau+K_2+L_2$$

dir. Son elde edilen eşitsizliğe Lemma 3.1.1 uygulanırsa, $t\geq t_0$ için

$$\|x(t)\|\leq c\prod_{t_0<\theta_i<t}(1+\|B_i\|)\exp\int_{t_0}^{t}(\|A(s)\|+\|A(s+\tau)\|)ds$$

bulunur. Buradan (i) ve (iii) koşulları göz önüne alındığı zaman

$$\|x(t)\|\leq cL_1e^{2K_1},\ t\geq t_0,$$

çıkar. O halde $(3.1.1)-(3.1.2)$ probleminin $x(t)$ çözümü her $t\geq t_0$ için sınırlıdır, ve dolayısiyle

$$\|x(t)\| \leq K, \; t \geq t_0 - \tau, \tag{3.2.1}$$

olacak şekilde pozitif bir K sabiti var demektir.

Diğer taraftan $t_0 \leq s \leq t < \infty$ için (3.1.3) den,

$$\|x(t) - x(s)\| \leq \int_s^t \|A(u)\| \, \|x(u)\| \, du + \int_s^t \|A(u)\| \, \|x(u-\tau)\| \, du$$

$$+ \int_s^t \|f(u)\| \, du + \sum_{s \leq \theta_i < t} \|B_i\| \, \|x(\theta_i)\| + \sum_{s \leq \theta_i < t} \|D_i\| \,. \tag{3.2.2}$$

(3.2.1) ve (3.2.2) den,

$$\|x(t) - x(s)\| \leq 2K \int_s^t \|A(u)\| \, du + \int_s^t \|f(u)\| \, du$$

$$+ K \sum_{s \leq \theta_i < t} \|B_i\| + \sum_{s \leq \theta_i < t} \|D_i\| \tag{3.2.3}$$

bulunur. Belirtelim ki (iii) ve (iv) koşullarından, sırasiyle,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|B_i\| < \infty \tag{3.2.4}$$

ve

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|D_i\| < \infty \tag{3.2.5}$$

elde edilir.

(i), (ii), (3.2.4) ve (3.2.5) koşulları göz önüne alınırsa, (3.2.3) den

$$\lim_{s \to \infty} \|x(t) - x(s)\| = 0$$

çıkar. Böylece Cauchy yakınsaklık kriterinden, $\lim_{t \to \infty} x(t)$ nin R^n deki varlığı anlaşılmış olur.

3.3 $B_i = 0$ Halinde $l(\phi)$

(3.1.1) denklemi her $i \in Z^+$ için $B_i = 0$ halinde

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)[x(t) - x(t-\tau)] + f(t),\ t \geq t_0,\ t \neq \theta_i, \\ \Delta x(\theta_i) = D_i,\ i \in Z^+ = \{1, 2, ...\}, \end{cases} \tag{3.3.1}$$

şeklini alır.

Bu kesimde (3.3.1), (3.1.2) başlangıç değer probleminin $x(t)$ çözümünün yakınsadığı sabit $l(\phi)$ vektörünün, verilen başlangıç fonksiyonuna ve bir integral denklemin matris çözümüne bağlı olarak hesaplanabildiği ispatlanacaktır. Bunun için bazı ön hazırlıkların yapılması gerekmektedir.

I, $n \times n$ boyutlu birim matris olmak üzere

$$Y(t) = I + \int_t^{t+\tau} Y(s)A(s)ds,\ t \geq t_0\ , \tag{3.3.2}$$

integral denklemini göz önüne alalım.

Teorem 3.3.1. $(H1)$ hipotezi ve

(v) $\displaystyle\int_t^{t+\tau} \|A(s)\|\, ds \leq \rho < 1,\ t \geq t_0,$

koşulu sağlansın.

Bu durumda (3.3.2) sağlanacak şekilde bir tek sürekli ve sınırlı $Y : [t_0, \infty) \to R^{n \times n}$ matris fonksiyonu vardır.

İspat. (3.3.2) denklemi herhangi bir impulse noktası içermediği için bu teoremin ispatı, (Bereketoğlu and Pituk 2003) deki Teorem 2 nin ispatının bir tekrarı olacaktır.

B sürekli ve sınırlı olan $Y : [t_0, \infty) \to R^{n\times n}$ matris fonksiyonlarının uzayını göstersin. B uzayı,

$$\|Y\|_B = \sup_{t\geq t_0} \|Y(t)\|\,,\; Y \in B,$$

normuna göre bir Banach uzayıdır. $Y \in B$ ve $t \geq t_0$ için

$$TY(t) = I + \int_t^{t+\tau} Y(s)A(s)ds$$

dönüşümünü tanımlayalım. (v) varsayımından, T dönüşümü B yi B ye dönüştürür ve her $Y,\; Z \in B$ için

$$\|TY(t) - TZ(t)\| \leq \int_t^{t+\tau} \|Y(s) - Z(s)\|\,\|A(s)\|\,ds$$

dir. Yine (v) koşulu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\|TY - TZ\|_B &\leq \|Y - Z\|_B \int_t^{t+\tau} \|A(s)\|\,ds\\ &\leq \rho\,\|Y - Z\|_B\end{aligned}$$

bulunur. $\rho < 1$ olduğundan, $T : B \to B$ bir daralma dönüşümüdür. O halde Banach sabit nokta teoremi gereği $TY = Y$ denkleminin tek $Y \in B$ çözümü (3.3.2) integral denkleminin tek sürekli ve sınırlı matris çözümüdür.

Şimdi

$$C(t) = Y(t)x(t) - \int_t^{t+\tau} Y(s)A(s)x(s-\tau)ds,\; t \geq t_0, \tag{3.3.3}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım; burada Y, Teorem 3.3.1 deki gibidir ve x, (3.3.1), (3.1.2) probleminin çözümüdür.

Lemma 3.3.1. $(H1)$, $(H2)$, $(H4)$ hipotezleri ve (v) koşulu sağlansın. Bu durumda

$$\begin{cases} C'(t) = Y(t)f(t), \quad t \geq t_0,\ t \neq \theta_i, \\ \Delta C(\theta_i) = Y(\theta_i)D_i,\ \theta_i = t_0 + i\tau,\ i \in Z^+. \end{cases} \tag{3.3.4}$$

İspat. (3.3.3) ün $t \in (\theta_i, \theta_{i+1}),\ i \in Z^+$, için türevi alınırsa,

$$C'(t) = Y'(t)x(t) + Y(t)x'(t) - Y(t+\tau)A(t+\tau)x(t) + Y(t)A(t)x(t-\tau) \tag{3.3.5}$$

elde edilir. (3.3.2) den, $t \geq t_0$ için

$$Y'(t) = Y(t+\tau)A(t+\tau) - Y(t)A(t) \tag{3.3.6}$$

dir. (3.3.1) ve (3.3.6) eşitlikleri (3.3.5) de yerlerine konulurlarsa,

$$\begin{aligned} C'(t) &= [Y(t+\tau)A(t+\tau) - Y(t)A(t)]\, x(t) \\ &\quad + Y(t)\,[A(t)x(t) - A(t)x(t-\tau) + f(t)] \\ &\quad - Y(t+\tau)A(t+\tau)x(t) + Y(t)A(t)x(t-\tau) \\ &= Y(t)f(t),\ t \geq t_0,\ t \neq \theta_i, \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca (3.3.3) ve (3.3.1) den,

$$\begin{aligned} \Delta C(\theta_i) &= C(\theta_i^+) - C(\theta_i^-) \\ &= Y(\theta_i^+)x(\theta_i^+) - Y(\theta_i^-)x(\theta_i^-) \\ &= Y(\theta_i)\Delta x(\theta_i) \\ &= Y(\theta_i)D_i \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.3.1. Lemma 3.3.1 in hipotezleri altında (3.3.3) ile verilen $C(t)$ fonksiyonu

$$C(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y(s)f(s)ds + \sum_{t_0<\theta_i<t} Y(\theta_i)D_i, \ t \geq t_0. \tag{3.3.7}$$

şeklinde yazılabilir.

İspat. (3.3.4) ün her iki yanı t_0 dan t ye integre edilirse, $t \geq t_0$ için

$$\int_{t_0}^{t} C'(s)ds = \int_{t_0}^{t} Y(s)f(s)ds \tag{3.3.8}$$

dir. Diğer taraftan

$$\int_{t_0}^{t} C'(s)ds = \int_{t_0}^{\theta_1^-} C'(s)ds + \int_{\theta_1^+}^{\theta_2^-} C'(s)ds + \int_{\theta_2^+}^{\theta_3^-} C'(s)ds + ... + \int_{\theta_k^+}^{t} C'(s)ds$$

$$= C(t) - C(t_0) - \sum_{t_0<\theta_i<t} \Delta C(\theta_i)$$

ve bu eşitlik (3.3.8) de yerine konulursa, (3.3.7) elde edilir.

Artık $t \to \infty$ halinde, (3.3.1), (3.1.2) probleminin çözümünün yakınsadığı sabit vektör hesaplanabilir.

Teorem 3.3.2. $(H3)$ ve (iii) hariç olmak üzere Teorem 3.2.1 in hipotezleri ve (v) koşulu sağlansın. (3.3.1), (3.1.2) probleminin $x(t)$ çözümünün $t \to \infty$ için limiti $l(\phi)$ olsun. Bu durumda

$$l(\phi) = Y(t_0)\phi(t_0) - \int_{t_0}^{t_0+\tau} Y(s)A(s)\phi(s-\tau)ds$$

$$+ \int_{t_0}^{\infty} Y(s)f(s)ds + \sum_{t_0<\theta_k} Y(\theta_k)D_k \tag{3.3.9}$$

dır; burada Y, (3.3.2) integral denkleminin sürekli ve sınırlı olan tek matris çözümüdür.

İspat. x, (3.3.1), (3.1.2) probleminin tek çözümü olsun. İspat için

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} Y(s)f(s)ds + \sum_{t_0<\theta_k} Y(\theta_k)D_k \qquad (3.3.10)$$

olduğunu göstermek yeterlidir; burada C, (3.3.3) deki gibidir.

(3.3.7) den, $t \geq t_0$ için

$$\begin{aligned} x(t) - C(t_0) - \int_{t_0}^{\infty} Y(s)f(s)ds - \sum_{t_0<\theta_k} Y(\theta_k)D_k \\ = x(t) - \left[C(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y(s)f(s)ds + \sum_{t_0<\theta_k<t} Y(\theta_k)D_k\right] \\ - \int_{t}^{\infty} Y(s)f(s)ds - \sum_{t\leq\theta_k} Y(\theta_k)D_k \\ = x(t) - C(t) - \int_{t}^{\infty} Y(s)f(s)ds - \sum_{t\leq\theta_k} Y(\theta_k)D_k \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik ve (3.3.3) birlikte ele alındığında, $t \geq t_0$ için

$$\begin{aligned} x(t)-C(t_0)-\int_{t_0}^{\infty} Y(s)f(s)ds-\sum_{t_0<\theta_k} Y(\theta_k)D_k \\ = x(t) - Y(t)x(t) + \int_{t}^{t+\tau} Y(s)A(s)x(s-\tau)ds \\ - \int_{t}^{\infty} Y(s)f(s)ds - \sum_{t\leq\theta_k} Y(\theta_k)D_k \qquad (3.3.11) \end{aligned}$$

bulunur. (3.3.2) nin her iki yanı $x(t)$ ile çarpıldığında, $t \geq t_0$ için

$$x(t) = Y(t)x(t) - \int_{t}^{t+\tau} Y(s)A(s)x(t)ds \tag{3.3.12}$$

bulunur. (3.3.12) eşitliği (3.3.11) de yerine konulursa, $t \geq t_0$ için

$$x(t) - C(t_0) - \int_{t_0}^{\infty} Y(s)f(s)ds - \sum_{t_0 < \theta_k} Y(\theta_k)D_k$$

$$= \int_{t}^{t+\tau} Y(s)A(s)[x(s-\tau) - x(t)]ds$$

$$- \int_{t}^{\infty} Y(s)f(s)ds - \sum_{t \leq \theta_k} Y(\theta_k)D_k \tag{3.3.13}$$

elde edilir. (3.2.1) kestirimi ve $Y(t)$ nin $[t_0, \infty)$ üzerinde sınırlı olduğu gerçeği (3.3.13) de göz önüne alınırsa, $t \geq t_0$ için

$$\left\| x(t) - C(t_0) - \int_{t_0}^{\infty} Y(s)f(s)ds - \sum_{t_0 < \theta_k} Y(\theta_k)D_k \right\|$$

$$\leq 2K \left\| Y \right\|_B \int_{t}^{t+\tau} \left\| A(s) \right\| ds + \left\| Y \right\|_B \int_{t}^{\infty} \left\| f(s) \right\| ds + \left\| Y \right\|_B \sum_{t \leq \theta_k} \left\| D_k \right\|$$

bulunur. Böylece (3.3.10) gerçeklenmiş olur. (3.1.2) ve (3.3.3) birlikte göz önüne alındığı zaman (3.3.10) daki limit (3.3.9) a indirgenir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Uyarı 3.3.1. (3.3.1) diferensiyel denkleminde her $i \in Z^+$ için $D_i = 0$ ise, o zaman (3.3.1) denklemi sürekli hal olan gecikmeli

$$x'(t) = A(t)\left[x(t) - x(t-\tau)\right] + f(t), \; t \geq t_0, \tag{3.3.14}$$

diferensiyel denklemine indirgenir. Bu durumda, (3.3.14), (3.1.2) problemi için

(3.3.9) limiti

$$l(\phi) = Y(t_0)\phi(t_0) - \int_{t_0}^{t_0+\tau} Y(s)A(s)\phi(s-\tau)ds + \int_{t_0}^{\infty} Y(s)f(s)ds$$

şeklini alır ki bu (Bereketoğlu and Pituk 2003) makalesindeki (10) limit ifadesinin özel bir durumudur.

3.4 $B_i \neq 0$ Durumu İçin $l(\phi)$

Bu kesimde (3.1.1) − (3.1.2) başlangıç değer probleminin $x(t)$ çözümünün $t \to \infty$ halindeki $l(\phi)$ limiti hesaplanacaktır. Bunun için

$$Y(t) = I + \int_{t}^{t+\tau} Y(s)A(s)ds + \sum_{t \leq \theta_k} Y(\theta_k)B_k(I+B_k)^{-1}, \ t \geq t_0 \ , \tag{3.4.1}$$

integral denklemini göz önüne alalım; burada I, $n \times n$ boyutlu birim matristir.

Teorem 3.4.1. $(H1), (H3)$ hipotezleri ve

(vi) $\displaystyle\int_{t}^{t+\tau} \|A(s)\|\, ds + \sum_{t \leq \theta_k} \|B_k(I+B_k)^{-1}\| \leq \rho < 1, \ t \geq t_0,$

koşulu sağlansın.

Bu durumda (3.4.1) sağlanacak şekilde bir tek sınırlı $Y \in PLC([t_0, \infty), R^{n \times n})$ matris fonksiyonu vardır.

İspat.

$$B = \left\{ Y \in PLC([t_0,\infty), R^{n\times n}) : \|Y\|_B \leq \lambda, \ \lambda \geq \frac{1}{1-\rho} \right\}$$

uzayı

$$\|Y\|_B = \sup_{t \geq t_0} \|Y(t)\|\,, \ Y \in B,$$

normuna göre bir Banach uzayıdır. $Y \in B$ ve $t \geq t_0$ için

$$TY(t) = I + \int_{t}^{t+\tau} Y(s)A(s)ds + \sum_{t \leq \theta_k} Y(\theta_k)B_k(I + B_k)^{-1}$$

operatörünü tanımlayalım.

İlk olarak $TY \in PLC([t_0, \infty), R^{n\times n})$ olduğunu gösterelim.

$$TY(\theta_i^-) = \lim_{t\to\theta_i^-} TY(t) = TY(\theta_i)$$

ve

$$TY(\theta_i^+) = \lim_{t\to\theta_i^+} TY(t) = TY(\theta_i) - Y(\theta_i)B_i(I + B_i)^{-1}$$

dir.

Diğer taraftan $t_1 \in (\theta_i, \theta_{i+1})$, $i \in Z^+$, için

$$TY(t_1^+) = TY(t_1^-) = TY(t_1)$$

dir. Böylece $TY \in PLC([t_0, \infty), R^{n\times n})$ dir.

Ayrıca $t \geq t_0$ için (vi) koşulundan,

$$\begin{aligned} \|TY\|_B &\leq 1 + \rho \|Y\|_B \\ &\leq \lambda \end{aligned}$$

bulunur. Böylece T, B yi B ye dönüştürür. Diğer taraftan $Y,\ Z \in B$ için tekrar (vi) koşulu göz önüne alınırsa,

$$\|TY - TZ\|_B \leq \rho \|Y - Z\|_B$$

elde edilir. $\rho < 1$ olduğundan, $T : B \to B$ bir daralma dönüşümüdür. O halde Banach sabit nokta teoremi gereği $TY = Y$ denkleminin tek $Y \in B$ matris çözümü (3.4.1) integral denkleminin sınırlı olan tek $Y \in PLC([t_0, \infty), R^{n\times n})$ çözümüdür.

Uyarı 3.4.1. Her $i \in Z^+$ için $B_i = 0$ ise, (3.4.1) integral denklemi (3.3.2) ye indirgenir. Belirtelim ki (3.3.2) nin Y matris çözümü sürekli bir fonksiyondur.

Lemma 3.4.1. Teorem 3.4.1 in hipotezleri altında (3.4.1) in Y matris çözümü aşağıdaki adjoint denklemi sağlar:

$$\begin{cases} Y'(t) = Y(t+\tau)A(t+\tau) - Y(t)A(t), \ t \geq t_0, \ t \neq \theta_i, \\ \Delta Y(\theta_i) = -Y(\theta_i)B_i(I+B_i)^{-1}, \ \theta_i = t_0 + i\tau, \ i \in Z^+. \end{cases} \tag{3.4.2}$$

İspat. $t \in (\theta_i, \theta_{i+1}), \ i \in Z^+$, için (3.4.1) in iki yanı türevlenirse

$$Y'(t) = Y(t+\tau)A(t+\tau) - Y(t)A(t)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \Delta Y(\theta_i) &= Y(\theta_i^+) - Y(\theta_i^-) \\ &= \sum_{\theta_i^+ \leq \theta_k} Y(\theta_k)B_k(I+B_k)^{-1} - \sum_{\theta_i^- \leq \theta_k} Y(\theta_k)B_k(I+B_k)^{-1} \\ &= -Y(\theta_i)B_i(I+B_i)^{-1} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi

$$C(t) = Y(t)x(t) - \int_t^{t+\tau} Y(s)A(s)x(s-\tau)ds, \ t \geq t_0, \tag{3.4.3}$$

vektör değerli fonksiyonunu göz önüne alalım; burada Y, Teorem 3.4.1 deki gibidir ve x, (3.1.1) – (3.1.2) probleminin çözümüdür.

Lemma 3.4.2. $(H1) - (H4)$ hipotezleri ve (vi) koşulu sağlansın. Bu durumda

$$\begin{cases} C'(t) = Y(t)f(t), \ \ t \geq t_0, \ t \neq \theta_i, \\ \Delta C(\theta_i) = Y(\theta_i^+)D_i, \ \theta_i = t_0 + i\tau, \ i \in Z^+. \end{cases} \tag{3.4.4}$$

İspat. (3.4.3) ün $t \in (\theta_i, \theta_{i+1}),\ i \in Z^+$, için türevi alınıp Lemma 3.3.1 in ispatındaki benzer işlemler yapılırsa,

$$C'(t) = Y(t)f(t), \quad t \geq t_0,\ t \neq \theta_i,$$

elde edilir.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \Delta C(\theta_i) &= C(\theta_i^+) - C(\theta_i^-) \\ &= Y(\theta_i^+)x(\theta_i^+) - Y(\theta_i^-)x(\theta_i^-) \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

dir.

$$x(\theta_i^+) = (I + B_i)x(\theta_i) + D_i$$

ve

$$Y(\theta_i^+) = Y(\theta_i) - Y(\theta_i)B_i(I + B_i)^{-1}$$

eşitlikleri (3.4.5) de yerlerine yazılırsa,

$$\Delta C(\theta_i) = Y(\theta_i^+)D_i,\ i \in Z^+,$$

elde edilir.

Uyarı 3.4.2. Her $i \in Z^+$ için $B_i = 0$ ise, $Y(\theta_i^+) = Y(\theta_i)$ olduğundan, (3.4.4) denklemi (3.3.4) e indirgenir.

Sonuç 3.4.1. Lemma 3.4.2 nin hipotezleri altında (3.4.3) ile verilen $C(t)$ fonksiyonu

$$C(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y(s)f(s)ds + \sum_{t_0 < \theta_i < t} Y(\theta_i^+)D_i,\ t \geq t_0 \tag{3.4.6}$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 3.4.2. Teorem 3.2.1 in hipotezleri ve (vi) koşulu sağlansın. $(3.1.1)-(3.1.2)$ probleminin $x(t)$ çözümünün $t \to \infty$ için limiti $l(\phi)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} l(\phi) &= Y(t_0)\phi(t_0) - \int_{t_0}^{t_0+\tau} Y(s)A(s)\phi(s-\tau)ds \\ &\quad + \int_{t_0}^{\infty} Y(s)f(s)ds + \sum_{t_0<\theta_k} Y(\theta_k^+)D_k \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

dır; burada Y, (3.4.1) integral denkleminin tek çözümüdür.

İspat. Teorem 3.3.2 nin ispatındaki benzer işlemler yapılarak sonuç elde edilir.

Uyarı 3.4.3. Her $i \in Z^+$ için $B_i = 0$ ise, (3.4.7) deki limit ifadesi (3.3.9) a indirgenir.

4. IMPULSE KOŞULLARI GECİKMELİ OLAN IMPULSIVE GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERDE ÇÖZÜMÜN ASİMPTOTİKSEL SABİTLİK DURUMU

4.1 Giriş

Bu bölümde impulse koşulları gecikmeli olan impulsive gecikmeli

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)[x(t) - x(t-\tau)] + f(t),\ t \geq t_0,\ t \neq \theta_i, \\ \Delta x(\theta_i) = B_i[x(\theta_i) - x(\theta_{i-m})] + D_i,\ i \in Z^+ = \{1,\ 2, ...\}, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

diferensiyel denklemi ele alınmaktadır, burada $i \in Z^+$ için $\theta_i = t_0 + i\tau$; $t_0 \geq 0,\ \tau > 0$, $m \in Z^+$; $i \leq m$ için $\theta_{i-m} \in [t_0 - \tau, t_0)$ ve $j \in \{1-m, 2-m, ..., -2, -1, 0\}$ için $\theta_j < \theta_{j+1}$; $\Delta x(\theta_i) = x(\theta_i^+) - x(\theta_i^-)$, $x(\theta_i^+) = \lim\limits_{t \to \theta_i^+} x(t),\ x(\theta_i^-) = \lim\limits_{t \to \theta_i^-} x(t) = x(\theta_i)$ dir. Bunlara ilave olarak aşağıdaki koşulları kabul edelim:

$(H1)$ $A : [t_0, \infty) \to R^{n \times n}$ sürekli bir matris fonksiyondur,

$(H2)$ $f : [t_0, \infty) \to R^n$ sürekli bir vektör fonksiyondur,

$(H3)$ $B_i \in R^{n \times n},\ \det(I + B_i) \neq 0,\ i \in Z^+$; burada $I,\ n \times n$ boyutlu birim matristir,

$(H4)$ $D_i \in R^n,\quad i \in Z^+$.

(4.1.1) denklemi

$$x(t) = \phi(t),\ t \in [t_0 - \tau, t_0], \tag{4.1.2}$$

başlangıç koşulu ile birlikte ele alınmaktadır, burada $\phi : [t_0 - \tau, t_0] \to R^n$ sürekli bir başlangıç fonksiyonu olup $\|\phi\|_r = \sup\limits_{t_0 - r \leq t \leq t_0} \|\phi(t)\|$, $r \geq 0$, $\xi \in R^n$ için $\|\xi\| = |\xi_1| + |\xi_2| + ... + |\xi_n|$ ve $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ için $\|A\| = \max\limits_{i=1,2,...,n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ dir.

Ayrıca, (4.1.1) – (4.1.2) probleminin $x(t)$ çözümü için aşağıdaki integral denklemi sağlanmaktadır:

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t), & t_0 - \tau \le t \le t_0, \\ x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} A(s)x(s)ds - \int\limits_{t_0}^{t} A(s)x(s-\tau)ds + \int\limits_{t_0}^{t} f(s)ds & \\ + \sum\limits_{t_0<\theta_i<t} B_i x(\theta_i) - \sum\limits_{t_0<\theta_i<t} B_i x(\theta_{i-m}) + \sum\limits_{t_0<\theta_i<t} D_i, \ t \ge t_0. & \end{cases} \tag{4.1.3}$$

Bu bölümde amacımız, impulse koşulları gecikmeler içeren $(4.1.1)-(4.1.2)$ başlangıç değer probleminin $x(t)$ çözümünün $t \to \infty$ için sabit bir vektöre yakınsadığını göstermek ve daha sonra bu sabit vektörü, verilen başlangıç fonksiyonu ve bir integral denklemin matris çözümü cinsinden hesaplamaktır.

4.2 Çözümün Yakınsaklığı

Bu kesimde $(4.1.1)-(4.1.2)$ başlangıç değer probleminin $x(t)$ çözümü için $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) \in R^n$ olduğu ispatlanacaktır.

Teorem 4.2.1. $(H1)-(H4)$ hipotezlerine ek olarak aşağıdaki koşullar sağlansın:

(i) $\int\limits_{t_0}^{\infty} \|A(s)\| \, ds \le K_1 < \infty,$

(ii) $\int\limits_{t_0}^{\infty} \|f(s)\| \, ds \le K_2 < \infty,$

(iii) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|B_i\| \le L_1 < \infty,$

(iv) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|D_i\| \le L_2 < \infty.$

Bu durumda $(4.1.1)-(4.1.2)$ probleminin $x(t)$ çözümü, $t \to \infty$ halinde sabit bir vektöre yakınsar, yani $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = l(\phi) \in R^n$ dir.

İspat. x, (4.1.1) – (4.1.2) probleminin tek çözümü olsun. Bu durumda (4.1.3) den,

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|A(s)\| \, \|x(s)\| \, ds + \int_{t_0}^{t} \|A(s)\| \, \|x(s-\tau)\| \, ds$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \|f(s)\| \, ds + \sum_{i=1}^{k} \|B_i\| \, \|x(\theta_i)\|$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \|B_i\| \, \|x(\theta_{i-m})\| + \sum_{i=1}^{k} \|D_i\| \,, \quad t \geq t_0.$$

elde edilir. Bu eşitsizlik aşağıdaki şekilde tekrar düzenlenebilir:

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|A(s)\| \, \|x(s)\| \, ds + \int_{t_0-\tau}^{t-\tau} \|A(s+\tau)\| \, \|x(s)\| \, ds$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \|f(s)\| \, ds + \sum_{i=1}^{k} \|B_i\| \, \|x(\theta_i)\|$$

$$+ \sum_{i=1-m}^{k-m} \|B_{i+m}\| \, \|x(\theta_i)\| + \sum_{i=1}^{k} \|D_i\|$$

$$= \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|A(s)\| \, \|x(s)\| \, ds + \int_{t_0-\tau}^{t_0} \|A(s+\tau)\| \, \|x(s)\| \, ds$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \|A(s+\tau)\| \, \|x(s)\| \, ds - \int_{t-\tau}^{t} \|A(s+\tau)\| \, \|x(s)\| \, ds$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \|f(s)\| \, ds + \sum_{i=1}^{k} \|B_i\| \, \|x(\theta_i)\| + \sum_{i=1-m}^{0} \|B_{i+m}\| \, \|x(\theta_i)\|$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \|B_{i+m}\| \, \|x(\theta_i)\| - \sum_{i=k-m+1}^{k} \|B_{i+m}\| \, \|x(\theta_i)\| + \sum_{i=1}^{k} \|D_i\|$$

$$\leq \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} (\|A(s)\| + \|A(s+\tau)\|) \, \|x(s)\| \, ds + \int_{t_0}^{t} \|f(s)\| \, ds$$

$$+\|\phi\|_\tau \int_{t_0-\tau}^{t_0} \|A(s+\tau)\|\,ds + \sum_{i=1}^{k} (\|B_i\| + \|B_{i+m}\|)\,\|x(\theta_i)\|$$

$$+\|\phi\|_\tau \sum_{i=1-m}^{0} \|B_{i+m}\| + \sum_{i=1}^{k} \|D_i\|\,.$$

$(i)-(ii)$ koşullarından, $t \geq t_0$ için

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| \quad \leq \quad & \|\phi(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} (\|A(s)\| + \|A(s+\tau)\|)\,\|x(s)\|\,ds \\
& + K_1 \|\phi\|_\tau + K_2 + \sum_{i=1}^{k} (\|B_i\| + \|B_{i+m}\|)\,\|x(\theta_i)\| \\
& + \|\phi\|_\tau \sum_{i=1}^{m} \|B_i\| + \sum_{i=1}^{k} \|D_i\|
\end{aligned}$$

ve $(iii)-(iv)$ koşullarından,

$$\|x(t)\| \leq c_0 + \int_{t_0}^{t} (\|A(s)\| + \|A(s+\tau)\|)\,\|x(s)\|\,ds$$

$$+ \sum_{t_0<\theta_i<t} (\|B_i\| + \|B_{i+m}\|)\,\|x(\theta_i)\|\,, \quad t \geq t_0,$$

elde edilir, burada

$$c_0 = \|\phi(t_0)\| + K_1 \|\phi\|_\tau + K_2 + L_1 \|\phi\|_\tau + L_2$$

dir. Son elde edilen eşitsizliğe Lemma 3.1.1 uygulanırsa, $t \geq t_0$ için

$$\|x(t)\| \leq c_0 \prod_{t_0<\theta_i<t} (1 + \|B_i\| + \|B_{i+m}\|) \exp \int_{t_0}^{t} (\|A(s)\| + \|A(s+\tau)\|)ds \qquad (4.2.1)$$

bulunur.

Her $x \in R$ için $1 + x \leq e^x$ olduğundan, (4.2.1) eşitsizliği aşağıdaki şekilde tekrar yazılabilir:

$$\|x(t)\| \leq c_0 \left(\prod_{t_0<\theta_i<t} \exp(\|B_i\| + \|B_{i+m}\|) \right) \exp \int_{t_0}^{t} (\|A(s)\| + \|A(s+\tau)\|) ds$$

$$= c_0 \exp \left(\sum_{t_0<\theta_i<t} (\|B_i\| + \|B_{i+m}\|) + \int_{t_0}^{t} (\|A(s)\| + \|A(s+\tau)\|) ds \right).$$

(i) ve (iii) koşullarından,

$$\|x(t)\| \leq c_0 e^{2L_1+2K_1},\ t \geq t_0,$$

elde edilir. O halde $(4.1.1)-(4.1.2)$ probleminin $x(t)$ çözümü her $t \geq t_0$ için sınırlıdır ve dolayısiyle

$$\|x(t)\| \leq K,\ t \geq t_0 - \tau, \tag{4.2.2}$$

olacak şekilde pozitif bir K sabiti vardır.

Diğer taraftan $t_0 \leq s \leq t < \infty$ için (4.1.3) den,

$$\begin{aligned} \|x(t) - x(s)\| \leq & \int_s^t \|A(u)\| \, \|x(u)\| \, du + \int_s^t \|A(u)\| \, \|x(u-\tau)\| \, du \\ & + \int_s^t \|f(u)\| \, du + \sum_{s\leq\theta_i<t} \|B_i\| \, \|x(\theta_i)\| \\ & + \sum_{s\leq\theta_i<t} \|B_i\| \, \|x(\theta_{i-m})\| + \sum_{s\leq\theta_i<t} \|D_i\| \, . \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

(4.2.2) ve (4.2.3) den,

$$\begin{aligned} \|x(t) - x(s)\| \leq & \ 2K \int_s^t \|A(u)\| \, du + \int_s^t \|f(u)\| \, du \\ & + 2K \sum_{s\leq\theta_i<t} \|B_i\| + \sum_{s\leq\theta_i<t} \|D_i\| \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

bulunur. $(i)-(iv)$ koşulları göz önüne alınırsa, (4.2.4) den

$$\lim_{s\to\infty} \|x(t)-x(s)\| = 0$$

elde edilir. Böylece Cauchy yakınsaklık kriterinden, $t\to\infty$ için $x(t)$ nin limitinin R^n deki varlığı anlaşılmış olur.

4.3 $l(\phi)$ nin Hesabı

Bu kesimde, $(4.1.1)-(4.1.2)$ probleminin $x(t)$ çözümünün $\lim_{t\to\infty} x(t) = l(\phi)$ limiti hesaplanacaktır. Buna hazırlık olması bakımından

$$Y(t) = I + \int_t^{t+\tau} A^T(s)Y(s)ds + \sum_{p(t)\le k<p(t)+m} B_k^T Y(\theta_k^+),\ t\ge t_0\ , \tag{4.3.1}$$

integral denklemiyle ilgili olarak aşağıdaki sonuçlar ispatlanmaktadır; burada I, $n\times n$ boyutlu birim matris ve $p(t)=\min\{k\in Z^+ : \theta_k \ge t\}$ dir.

Önce $PLC([t_0,\infty),R^{n\times n})$ uzayını göz önüne alalım. Bu uzay $t\in[t_0,\infty)$, $t\ne\theta_i$ $(i\in Z^+)$, için sürekli olan, $\theta_i\in(t_0,\infty)$ noktalarında birinci çeşit süreksizliğe sahip, soldan sürekli $\varphi:[t_0,\infty)\to R^{n\times n}$ matris fonksiyonlarının sınıfını göstermektedir.

Teorem 4.3.1. $(H1)$, $(H3)$ hipotezleri ile birlikte

$$(v)\ \int_t^{t+\tau} \left\|A^T(s)\right\| ds + \sum_{p(t)\le k<p(t)+m} \left\|B_k^T\right\| \le \rho < 1,\ t\ge t_0,$$

koşulu sağlansın.

Bu durumda (4.3.1) sağlanacak şekilde bir tek sınırlı $Y\in PLC([t_0,\infty),R^{n\times n})$ matris fonksiyonu vardır.

İspat.

$$B = \left\{Y\in PLC([t_0,\infty),R^{n\times n}) : \|Y\|_B \le \lambda,\ \lambda \ge \frac{1}{1-\rho}\right\}$$

uzayı

$$\|Y\|_B = \sup_{t \geq t_0} \|Y(t)\|\,,\ Y \in B,$$

normuna göre bir Banach uzayıdır. $Y \in B$ ve $t \geq t_0$ için

$$TY(t) = I + \int\limits_{t}^{t+\tau} A^T(s)Y(s)ds + \sum_{p(t) \leq k < p(t)+m} B_k^T Y(\theta_k^+)$$

operatörünü tanımlayalım.

İlk olarak $TY \in PLC([t_0, \infty), R^{n\times n})$ olduğunu gösterelim.

$p(\theta_i^-) = p(\theta_i) = i$ ve $p(\theta_i^+) = i + 1$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
TY(\theta_i^-) &= \lim_{t \to \theta_i^-} TY(t) \\
&= I + \int\limits_{\theta_i^-}^{\theta_i^- + \tau} A^T(s)Y(s)ds + \sum_{p(\theta_i^-) \leq k < p(\theta_i^-)+m} B_k^T Y(\theta_k^+) \\
&= I + \int\limits_{\theta_i}^{\theta_i + \tau} A^T(s)Y(s)ds + \sum_{i \leq k < i+m} B_k^T Y(\theta_k^+) \\
&= TY(\theta_i)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
TY(\theta_i^+) &= \lim_{t \to \theta_i^+} TY(t) \\
&= I + \int\limits_{\theta_i^+}^{\theta_i^+ + \tau} A^T(s)Y(s)ds + \sum_{p(\theta_i^+) \leq k < p(\theta_i^+)+m} B_k^T Y(\theta_k^+) \\
&= I + \int\limits_{\theta_i}^{\theta_i + \tau} A^T(s)Y(s)ds + \sum_{i+1 \leq k < i+m+1} B_k^T Y(\theta_k^+)
\end{aligned}$$

$$= \quad I + \int_{\theta_i}^{\theta_i+\tau} A^T(s)Y(s)ds + \sum_{i\le k<i+m} B_k^T Y(\theta_k^+)$$

$$-B_i^T Y(\theta_i^+) + B_{i+m}^T Y(\theta_{i+m}^+)$$

$$= TY(\theta_i) - B_i^T Y(\theta_i^+) + B_{i+m}^T Y(\theta_{i+m}^+)$$

elde edilir.

Diğer taraftan $t_1 \in (\theta_i, \theta_{i+1}),\ i \in Z^+$, için $p(t_1) = p(t_1^+) = p(t_1^-) = i+1$ olduğundan,

$$TY(t_1^+) = TY(t_1^-) = TY(t_1)$$

dir. Böylece $TY \in PLC([t_0,\infty), R^{n\times n})$ dir.

Ayrıca $t \ge t_0$ için

$$\|TY(t)\| \le 1 + \int_t^{t+\tau} \left\|A^T(s)\right\| \|Y(s)\|\, ds + \sum_{p(t)\le k<p(t)+m} \left\|B_k^T\right\| \left\|Y(\theta_k^+)\right\|$$

ve

$$\|TY\|_B \le 1 + \|Y\|_B \left\{ \int_t^{t+\tau} \left\|A^T(s)\right\| ds + \sum_{p(t)\le k<p(t)+m} \left\|B_k^T\right\| \right\}$$

elde edilir. (v) koşulundan,

$$\begin{aligned} \|TY\|_B &\le 1 + \rho \|Y\|_B \\ &\le 1 + \rho\lambda \\ &\le \lambda \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $T,\ B$ yi B ye dönüştüren bir dönüşümdür. Diğer taraftan $Y,\ Z \in B$ için

$$\|TY(t) - TZ(t)\| \le \int_t^{t+\tau} \left\|A^T(s)\right\| \|Y(s) - Z(s)\|\, ds$$

$$+ \sum_{p(t) \leq k < p(t)+m} \left\| B_k^T \right\| \left\| Y(\theta_k^+) - Z(\theta_k^+) \right\|$$

dır, buradan tekrar (v) koşulu göz önüne alındığında,

$$\|TY - TZ\|_B \leq \rho \|Y - Z\|_B$$

bulunur. $\rho < 1$ olduğundan, $T : B \to B$ bir daralma dönüşümüdür. O halde Banach sabit nokta teoremi gereği $TY = Y$ denkleminin tek $Y \in B$ matris çözümü (4.3.1) integral denkleminin sınırlı olan tek $Y \in PLC([t_0, \infty), R^{n\times n})$ çözümüdür.

Lemma 4.3.1. Teorem 4.3.1 in hipotezleri altında (4.3.1) in Y matris çözümü aşağıdaki adjoint denklemi sağlar:

$$\begin{cases} Y'(t) = A^T(t+\tau)Y(t+\tau) - A^T(t)Y(t), \ t \geq t_0, \ t \neq \theta_i, \\ \Delta Y(\theta_i) = B_{i+m}^T Y(\theta_{i+m}^+) - B_i^T Y(\theta_i^+), \ \theta_i = t_0 + i\tau, \ i \in Z^+. \end{cases} \tag{4.3.2}$$

İspat. $t \in (\theta_i, \theta_{i+1}), \ i \in Z^+$, için (4.3.1) in iki yanı türevlenirse,

$$Y'(t) = A^T(t+\tau)Y(t+\tau) - A^T(t)Y(t)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \Delta Y(\theta_i) &= Y(\theta_i^+) - Y(\theta_i^-) \\ &= \sum_{p(\theta_i^+) \leq k < p(\theta_i^+)+m} B_k^T Y(\theta_k^+) - \sum_{p(\theta_i^-) \leq k < p(\theta_i^-)+m} B_k^T Y(\theta_k^+). \end{aligned}$$

$p(\theta_i^+) = i+1$ ve $p(\theta_i^-) = i$ olduğundan,

$$\Delta Y(\theta_i) = B_{i+m}^T Y(\theta_{i+m}^+) - B_i^T Y(\theta_i^+)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi

$$C(t) = Y^T(t)x(t) - \int_t^{t+\tau} Y^T(s)A(s)x(s-\tau)ds$$

$$- \sum_{p(t) \le k < p(t)+m} Y^T(\theta_k^+)B_k x(\theta_{k-m}),\ t \ge t_0, \qquad (4.3.3)$$

vektör değerli fonksiyonunu göz önüne alalım; burada Y, Teorem 4.3.1 deki gibidir ve x, (4.1.1) – (4.1.2) probleminin çözümüdür.

Lemma 4.3.2. $(H1) - (H4)$ hipotezleri ve (v) koşulu sağlansın. Bu durumda

$$\begin{cases} C'(t) = Y^T(t)f(t), \quad t \ge t_0,\ t \ne \theta_i, \\ \Delta C(\theta_i) = Y^T(\theta_i^+)D_i,\ \theta_i = t_0 + i\tau,\ i \in Z^+. \end{cases} \qquad (4.3.4)$$

İspat. (4.3.3) ün $t \in (\theta_i, \theta_{i+1}),\ i \in Z^+$, için türevi alınırsa,

$$C'(t) = Y^{T'}(t)x(t) + Y^T(t)x'(t) - Y^T(t+\tau)A(t+\tau)x(t)$$

$$+Y^T(t)A(t)x(t-\tau) \qquad (4.3.5)$$

elde edilir. (4.1.1) ve (4.3.2), (4.3.5) de yerlerine konulurlarsa,

$$C'(t) = \left[Y^T(t+\tau)A(t+\tau) - Y^T(t)A(t)\right]x(t)$$

$$+Y^T(t)\left[A(t)x(t) - A(t)x(t-\tau) + f(t)\right]$$

$$-Y^T(t+\tau)A(t+\tau)x(t) + Y^T(t)A(t)x(t-\tau)$$

$$= Y^T(t)f(t),\ t \ge t_0,\ t \ne \theta_i.$$

Ayrıca, (4.3.3) den

$$\Delta C(\theta_i) = C(\theta_i^+) - C(\theta_i^-)$$

$$= Y^T(\theta_i^+)x(\theta_i^+) - \sum_{p(\theta_i^+)\le k<p(\theta_i^+)+m} Y^T(\theta_k^+)B_k x(\theta_{k-m})$$

$$-Y^T(\theta_i^-)x(\theta_i^-) + \sum_{p(\theta_i^-)\le k<p(\theta_i^-)+m} Y^T(\theta_k^+)B_k x(\theta_{k-m})$$

$$= Y^T(\theta_i^+)x(\theta_i^+) - Y^T(\theta_i)x(\theta_i)$$

$$-Y^T(\theta_{i+m}^+)B_{i+m}x(\theta_i) + Y^T(\theta_i^+)B_i x(\theta_{i-m}). \qquad (4.3.6)$$

(4.1.1) ve (4.3.2) deki impulse koşullarından,

$$x(\theta_i^+) = (I + B_i)x(\theta_i) - B_i x(\theta_{i-m}) + D_i$$

ve

$$Y^T(\theta_i^+) = Y^T(\theta_i)(I + B_i)^{-1} + Y^T(\theta_{i+m}^+)B_{i+m}(I + B_i)^{-1}$$

çıkar. Bu eşitliklerin (4.3.6) da yerlerine yazılmasiyle

$$\Delta C(\theta_i) = Y^T(\theta_i^+)D_i, \ i \in Z^+,$$

elde edilir.

Sonuç 4.3.1. Lemma 4.3.2 nin hipotezleri altında, (4.3.3) ile verilen $C(t)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$C(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y^T(s)f(s)ds + \sum_{t_0<\theta_i<t} Y^T(\theta_i^+)D_i, \ t \ge t_0. \qquad (4.3.7)$$

İspat. (4.3.4) in her iki yanı t_0 dan t ye integre edilirse, $t \ge t_0$ için

$$\int_{t_0}^{t} C'(s)ds = \int_{t_0}^{t} Y^T(s)f(s)ds \qquad (4.3.8)$$

dir. Diğer taraftan

$$\int_{t_0}^{t} C'(s)ds = \int_{t_0}^{\theta_1^-} C'(s)ds + \int_{\theta_1^+}^{\theta_2^-} C'(s)ds + \int_{\theta_2^+}^{\theta_3^-} C'(s)ds + ... + \int_{\theta_k^+}^{t} C'(s)ds$$

$$= C(t) - C(t_0) - \sum_{t_0<\theta_i<t} \Delta C(\theta_i)$$

bulunur ve bu eşitlik (4.3.8) de yerine konulursa (4.3.7) elde edilir.

Teorem 4.3.2. Teorem 4.2.1 in hipotezleri ve (v) koşulu sağlansın. (4.1.1) – (4.1.2) probleminin $x(t)$ çözümünün $t \to \infty$ için limiti $l(\phi)$ olsun. Bu durumda

$$l(\phi) = Y^T(t_0)\phi(t_0) - \int_{t_0}^{t_0+\tau} Y^T(s)A(s)\phi(s-\tau)ds$$

$$- \sum_{1\le k<m+1} Y^T(\theta_k^+)B_k\phi(\theta_{k-m}) + \int_{t_0}^{\infty} Y^T(s)f(s)ds$$

$$+ \sum_{t_0<\theta_k} Y^T(\theta_k^+)D_k. \tag{4.3.9}$$

İspat. $x(t)$, (4.1.1) – (4.1.2) probleminin çözümü olsun. İspat için

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} Y^T(s)f(s)ds + \sum_{t_0<\theta_k} Y^T(\theta_k^+)D_k \tag{4.3.10}$$

olduğunu göstermek yeterlidir; burada C, (4.3.3) deki gibidir.

(4.3.7) den $t \ge t_0$ için

$$x(t) - C(t_0) - \int_{t_0}^{\infty} Y^T(s)f(s)ds - \sum_{t_0<\theta_k} Y^T(\theta_k^+)D_k$$

$$= x(t) - \left[C(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y^T(s) f(s) ds + \sum_{t_0 < \theta_k < t} Y^T(\theta_k^+) D_k \right]$$

$$- \int_{t}^{\infty} Y^T(s) f(s) ds - \sum_{t \le \theta_k} Y^T(\theta_k^+) D_k$$

$$= x(t) - C(t) - \int_{t}^{\infty} Y^T(s) f(s) ds - \sum_{t \le \theta_k} Y^T(\theta_k^+) D_k$$

elde edilir. Bu eşitlik ve (4.3.3) birlikte ele alındığında, $t \ge t_0$ için

$$x(t) - C(t_0) - \int_{t_0}^{\infty} Y^T(s) f(s) ds - \sum_{t_0 < \theta_k} Y^T(\theta_k^+) D_k$$

$$= x(t) - Y^T(t) x(t) + \int_{t}^{t+\tau} Y^T(s) A(s) x(s-\tau) ds$$

$$+ \sum_{p(t) \le k < p(t)+m} Y^T(\theta_k^+) B_k x(\theta_{k-m})$$

$$- \int_{t}^{\infty} Y^T(s) f(s) ds - \sum_{t \le \theta_k} Y^T(\theta_k^+) D_k \tag{4.3.11}$$

bulunur.

(4.3.1) den

$$Y^T(t) = I + \int_{t}^{t+\tau} Y^T(s) A(s) ds + \sum_{p(t) \le k < p(t)+m} Y^T(\theta_k^+) B_k. \tag{4.3.12}$$

yazılabilir.

(4.3.12) nin her iki yanı $x(t)$ ile çarpıldığında, $t \ge t_0$ için

$$x(t) = Y^T(t) x(t) - \int_{t}^{t+\tau} Y^T(s) A(s) x(t) ds - \sum_{p(t) \le k < p(t)+m} Y^T(\theta_k^+) B_k x(t) \tag{4.3.13}$$

bulunur. (4.3.13) eşitliği (4.3.11) de yerine konulursa, $t \geq t_0$ için

$$
\begin{aligned}
x(t) - C(t_0) - \int_{t_0}^{\infty} Y^T(s) f(s) ds - \sum_{t_0 < \theta_k} Y^T(\theta_k^+) D_k \\
= \int_{t}^{t+\tau} Y^T(s) A(s) [x(s-\tau) - x(t)] ds \\
+ \sum_{p(t) \leq k < p(t)+m} Y^T(\theta_k^+) B_k [x(\theta_{k-m}) - x(t)] \\
- \int_{t}^{\infty} Y^T(s) f(s) ds - \sum_{t \leq \theta_k} Y^T(\theta_k^+) D_k \qquad (4.3.14)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (4.2.2) kestirimi ve $Y(t)$ nin $[t_0, \infty)$ üzerinde sınırlı olduğu gerçeği (4.3.14) de göz önüne alınırsa, $t \geq t_0$ için

$$
\begin{aligned}
\left\| x(t) - C(t_0) - \int_{t_0}^{\infty} Y^T(s) f(s) ds - \sum_{t_0 < \theta_k} Y^T(\theta_k^+) D_k \right\| \\
\leq 2K \left\| Y^T \right\|_B \int_{t}^{t+\tau} \|A(s)\| \, ds + 2K \left\| Y^T \right\|_B \sum_{p(t) \leq k < p(t)+m} \|B_k\| \\
+ \left\| Y^T \right\|_B \int_{t}^{\infty} \|f(s)\| \, ds + \left\| Y^T \right\|_B \sum_{t \leq \theta_k} \|D_k\|
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece (4.3.10) gerçeklenmiş olur. (4.1.2) ve (4.3.3) birlikte göz önüne alındığında, (4.3.10) daki limitin (4.3.9) a indirgenebildiği görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

KAYNAKLAR

Atkinson, F.V. and Haddock, J.R. 1983. Criteria for asymptotic constancy of solutions of functional differential equations. J. Math. Anal. Appl., 91; 410-423.

Bainov, D.D. and Simeonov, P.S. 1995. Impulsive Differential Equations, Asymptotic Properties of the Solutions. World Scientific, 227 p., Singapore.

Ballinger, G. and Liu, X. 1999. Existence and uniqueness results for impulsive delay differential equations. Dynamics of Continuous, Discrete Impulsive Sys., 5; 579- 591.

Bastinec, J., Diblik, J. and Smarda, Z. 2000. Convergence tests for one scalar differential equation with vanishing delay. Arch.Math.(Brno), 36; 405- 414.

Bereketoğlu, H. and Pituk, M. 2003. Asymptotic constancy for nonhomogeneous linear differential equations with unbounded delays. Discrete and Continuous Dynamical Systems. Supp. Vol., 100-107.

Berezansky, L. and Braverman, E. 1996. Exponential boundedness of solutions for impulsive delay differential equations. Appl. Math. Letters, 9(6); 91-95.

Carr, J. and Dyson, J. 1974/75. The functional differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$. Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh, 74A(13); 165-174.

Diblik, J. 1998. Asymptotic representation of solutions of equation $y'(t) = \beta(t)[y(t) - y(t - \tau(t))]$. J. Math. Anal. Appl., 217; 200-215.

Diblik, J. 1999. A criterion for convergence of solutions of homogeneous delay linear differential equations. Anal. Polon. Mat. 72; 115-130.

Fox, L., Mayers, D.F., Ockendon, J.R. and Tayler, A.B. 1971. On a functional differential equation. J. Inst. Math. Appl. 8; 271-307.

Gopalsamy, K. 1992. Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics. Kluwer Academic, 501 p., Dordrecht.

Gopalsamy, K. and Zhang, B.G. 1989. On delay differential equations with impulses. J. Math. Anal. Appl., 139; 110-122.

Györi, I. and Ladas, G. 1991. Oscillation Theory of Delay Differential Equations. Clarendon Press, 368 p., Oxford.

Haddock, J.R. and Sacker, R.J. 1980. Stability and asymptotic integration for certain linear systems of functional differential equations. J. Math. Anal. Appl., 76; 328-338.

Hale, J.K. and Lunel, S.V. 1993. Introduction to Functional Differential Equations. Springer-Verlag, 447 p., New York.

Kato, T. and Mcleod, J.B. 1971. The functional differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$. Bull. Amer. Math. Soc., 77; 891-937.

Kuang, Y. 1993. Delay Differential Equations With Applications in Population Dynamics. Academic Press, 398 p., USA.

Lakshmikantham, V., Bainov, D.D. and Simeonov, P.S. 1989. Theory of Impulsive Differential Equations. World Scientific, 272 p., Singapore.

Liu, X. and Ballinger, G. 2002. Existence and continuability of solutions for differential equations with delays and state-dependent impulses. Nonlinear Analysis TMA 51; 633-647.

Liu, X. and Ballinger, G. 2004. Continuous dependence on initial values for impulsive delay differential equations, Applied Math. Letters, 17; 483-490.

Mahler, K. 1940. On a special functional equation. J. London Math. Soc., 15; 115-123.

Makay, G. and Terjeki, J. 1998. On the asymptotic behavior of the pantograph equations. E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., No.2; 1-12.

Ockendon, J.R. and Tayler, A.B. 1971. The dynamics of a current collection system for an electric locomotive. Proc. Roy. Soc. London Series A, 332; 447-468.

Samoilenko, A.M. and Perestyuk, N.A. 1995. Impulsive Differential Equations, World Scientific. 459 p., Singapore.

Tang, X.H., He, Z. and Yu, J.S. 2002. Stability theorem for delay differential equations with impulses. Appl. Math. Comput., 131; 373-381.

Terjeki, J. 1995. Representation of the solutions to linear pantograph equations, Acta Sci. Math., 60; 705-713.

Yu, J.S. and Zhang, B.G. 1996. Stability theorem for delay differential equations with impulses. J. Math. Anal. Appl., 199; 162-175.

Yu, J.S. 2001. Explicit conditions for stability of nonlinear scalar delay differential equations with impulses. Nonlinear Analysis, 46; 53-67.

Zhang, S.N. 1981. Asymptotic behaviour and structure of solutions for equation $x'(t) = p(t)[x(t) - x(t-1)]$. J. Anhui University (Natural Science Edition), 2; 11-21.

Zhao, A. and Yan, J. 1996. Asymptotic behavior of solutions of impulsive delay differential equations. J. Math. Anal. Appl., 201; 943-954.

Zhao, A. and Yan, J. 1997. Existence of positive solutions for delay differential equations with impulses. J. Math. Anal. Appl., 210; 667-678.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Fatma KARAKOÇ
Doğum Yeri : İstanbul
Doğum Tarihi : 26.11.1976
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : T.S.K. Sağlık Meslek Lisesi (1994)
Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (1999)
Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2002)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü
Araştırma Görevlisi (2001 – ...)

Yayınları (SCI ve diğer)

- Bereketoğlu, H. and Karakoç, F. Asymptotic constancy for impulsive delay differential equations. Dynamic Systems and Applications (kabul edildi).
- Karakoç, F. and Bereketoğlu, H. Some results for linear impulsive delay differential equations. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems (kabul edildi).