ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BERNSTEIN POLİNOMLARI VE LİNEER POZİTİF FONKSİYONELLER

Gamze ANDAÇ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2015

TEZ ONAYI

Gamze ANDAÇ tarafından hazırlanan " **Bernstein Polinomları ve Lineer Pozitif Fonksiyoneller** " adlı tez çalışması 02/10/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA

Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Fatma YEŞİLDAL TAŞDELEN
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. H. Gül İNCE İLARSLAN
Gazi Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. İbrahim DEMİR
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

02/10/2015

Gamze ANDAÇ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BERNSTEIN POLİNOMLARI VE LİNEER POZİTİF FONKSİYONELLER

Gamze ANDAÇ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA

$[0,1]$ aralığında sürekli, reel değerli bir $f \in C[0,1]$ fonksiyonu için

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\tfrac{k}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}$$

ifadesine n-inci dereceden Bernstein polinomu denir. $B_n(f;x)$, derecesi $\leq n$ olan x in bir polinomudur ve Bernstein tarafından, Weierstrass'ın yaklaşım teoreminin basit bir ispatını vermek için inşa edilmiştir. Weierstrass yaklaşım teoreminin en yapıcı ispatları, bazı lineer pozitif operatör dizilerini kullanır. (Bir V lineer fonksiyon uzayı üzerinde tanımlı olan L lineer operatörü, her $f \in V$, $f \geq 0$ için $L(f) \geq 0$ koşulunu sağlıyorsa pozitiftir denir). $C[0,1]$ üzerindeki lineer pozitif operatörler sınırlı olmaktadır. Herhangi bir lineer pozitif operatör, sabitlenen bir noktaya göre bir lineer pozitif fonksiyonel olarak dikkate alınabilir. Tezde, bu uzayda tanımlı lineer pozitif fonksiyonellerin bazı özellikleri araştırılmıştır. Bu doğrultuda, önce konuya hazırlık niteliğindeki temel kavramlar, teoremler verilerek, Bernstein polinomlarının Stieltjes integral formundaki ifadesi elde edilmiştir. $C[0,1]$ üzerindeki herhangi bir sürekli lineer fonksiyonelin, g sınırlı salınımlı bir fonksiyon olmak üzere,

$$\Phi(f) = \int_0^1 f(x)dg(x)$$

Rieman-Stieltjes integrali formunda bir gösterime sahip olduğunu ifade eden Riesz teoreminin, Bernstein polinomları kullanarak elde edilen ispatı verilmiştir (Natanson 1964).

Ekim 2015, 63 sayfa

Anahtar Kelimeler: Riemann-Stieltjes integrali, Riesz gösterim teoremi, lineer pozitif operatör, Bernstein polinomları.

ABSTRACT

Master Thesis

BERNSTEIN POLYNOMIALS AND LINEAR POSITIVE FUNCTIONALS

Gamze ANDAÇ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA

For a continuous real valued function f defined on the closed interval $[0,1]$, the expression

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\tfrac{k}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}$$

is called the Bernstein polynomial of degree n for the function f. $B_n(f;x)$ is a polynomial in x of degree $\leq n$. The polynomials $B_n(f;x)$ were introduced by S. Bernstein to give an especially simple proof of the approximation theorem of Weierstrass. The most constructive proof of Weierstrass approximation theorem uses some linear positive operator sequence. (A linear operator L defined on a linear space of functions V, is called positive, if $L(f) \geq 0$, for all $f \in V,\ f \geq 0$). Linear positive operators on $C[0,1]$ is bounded. If any point is kept fixed then linear positive operator may be considered as a linear positive functional. In this thesis, it is intented to investigate the properties of linear positive functionals defined on $C[0,1]$. In this context, first giving the basic concepts and theorems of the preparatory subject in the Stieltjes integral form of Bernstein polynomial expression will be obtained. The proof of the Riesz representation theorem, which states that any linear continuous functional $\Phi(f)$ defined on the space $C[0,1]$ has the Riemann-Stieltjes integral represantation

$$\Phi(f) = \int_0^1 f(x)dg(x),$$

where $g(x)$ is a function of bounded variation, will be given by using Bernstein polynomials (Natanson 1964).

October 2015, 63 pages

Key Words: Riemann-Stieltjes integral, the Riesz representation theorem, linear positive operator, Bernstein polynomials.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın her aşamasında beni bilgi, fikir ve önerileriyle yönlendirip engin görüşleriyle ufuk veren ve bana her konuda yardımlarını esirgemeyerek destek olan hocam, Sayın Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA'ya (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), çalışmalarım süresince destek ve anlayışları için bölümdeki arkadaş ve hocalarıma ve ayrıca aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışması "TEV-Yüksek Lisans Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. TEV'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Gamze ANDAÇ
Ankara, Ekim 2015

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$AC\,[a,b]$	$[a,b]$ aralığında tanımlı mutlak sürekli fonksiyonlar uzayı
$B\,[a,b]$	$[a,b]$ aralığında tanımlı sınırlı fonksiyonlar uzayı
$BV\,[a,b]$	$[a,b]$ aralığında tanımlı sınırlı salınımlı fonksiyonlar uzayı
$C\,[a,b]$	$[a,b]$ aralığında sürekli reel değerli fonksiyonların uzayı
C_∞	$(-\infty,\infty)$ aralığında $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ olacak şekildeki sürekli fonksiyonlar uzayı
$\Vert f\Vert_{BV}$	$BV\,[a,b]$ uzayının normu
$\Vert f\Vert_{TV}$	$TV\,[a,b]$ uzayının normu
$\Vert f\Vert_\infty$	$B\,[a,b]$ uzayının normu
$TV\,[a,b]$	$[a,b]$ aralığında tanımlı sınırlı salınımlı fonksiyonların yarı normlu uzayı
$V_{[a,b]}\,[f]$	f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki toplam salınımı
$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyonu

1. GİRİŞ

Bir V lineer fonksiyon uzayı üzerinde tanımlı olan L lineer operatörü, her $f \in V$, $f \geq 0$ için $L(f) \geq 0$ koşulunu sağlıyorsa pozitiftir denir. Herhangi bir lineer pozitif operatör, sabitlenen bir noktaya göre bir lineer pozitif fonksiyonel olarak dikkate alınabilir. En önemli lineer pozitif yaklaşım operatörleri sürekli fonksiyonlar uzayında verilmektedir. Bu nedenle, bu uzayın ve dual uzayının anlaşılması ve özellikle lineer pozitif fonksiyonellerin genel gösterimlerinin bilinmesi önemlidir. $[0,1]$ aralığında sürekli, reel değerli bir f fonksiyonu ($f \in C[0,1]$) için

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\tfrac{k}{n}\right), \; n \in \mathbb{N}$$

ifadesine n-inci Bernstein polinomu denir. $(B_n f)(x)$, derecesi $\leq n$ olan x in bir polinomudur ve Bernstein tarafından, Weierstrass'ın yaklaşım teoreminin basit bir ispatını vermek için inşa edilmiştir. $f \in C[0,1]$ ise f için elde edilen Bernstein polinomlarının dizisi $[0,1]$ üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Yani

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n f - f\|_{C[a,b]} = 0$$

gerçeklenir. Bu tezde, $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayının dualinin, $[a,b]$ aralığında sınırlı salınımlı fonksiyonlar uzayı olduğunu gösteren *Riesz Gösterim Teoremi*'nin Bernstein polinomları kullanılarak elde edilen ispatı verilmiştir. Bu doğrultuda, konuya hazırlık niteliğindeki temel kavramlar, teoremler verilerek, Bernstein polinomlarının Stieltjes integral formundaki ifadesi elde edilmiştir (Natanson 1964).

Bardaro, Butzer, Stens ve Vinti'nin (Bardaro vd. 2003) çalışmasında, $V_{[0,1]}[f]$, f fonksiyonunun $[0,1]$ aralığındaki toplam salınımını göstermek üzere, $[0,1]$ üzerinde sınırlı salınımlı tüm fonksiyonların $\|f\|_{TV} := V_{[0,1]}[f]$ yarı normu ile donatılan sınıfı $TV[0,1]$ ile ve $\|f\|_{TV} := |f(0)| + V_{[0,1]}[f]$ normu ile donatılan sınıfı $BV[0,1]$ ile gösterilmiştir.

Bernstein polinomlarının *Salınım Azaltma Özelliğini* sağladığı, yani; $f \in BV[0,1]$ için

$$V_{[0,1]}[B_n f] \leq V_{[0,1]}[f], \quad n \in \mathbb{N}$$

eşitsizliğinin gerçeklendiği, Lorentz tarafından gösterilmiştir (Lorentz 1953). Ayrıca $(B_n f)$ dizisinin $[0,1]$ aralığında sınırlı salınımlı olan bir f fonksiyonuna salınım yarı normunda yakınsaması için gerek ve yeter koşulun $f \in AC[0,1]$ olması gerektiği Lorentz tarafından elde edilmiştir. Yani;

$$f \in AC[0,1] \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} V_{[0,1]}[B_n f - f] = 0$$

olmasıdır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1 (Lineer operatör) X ve Y iki lineer fonksiyon uzayı olmak üzere

$$L : X \to Y$$

şeklindeki L operatörü eğer, her $f, g \in X$ ve her α, β skaleri için

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$$

eşitliğini sağlıyorsa L ye lineer operatör denir (Paltanea 2004).

Tanım 2.2 (Lineer pozitif operatör) X bir lineer fonksiyon uzayı olmak üzere her $f \in X$ için

$$f \geq 0 \text{ iken } L(f) \geq 0$$

oluyorsa L ye pozitif operatör denir. L aynı zamanda lineerlik şartını da sağlıyorsa L ye lineer pozitif operatör adı verilir (Paltanea 2004).

Tanım 2.3 (Normlu Uzay) X bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$\|\cdot\| : X \to K \qquad x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall\ x,\ y \in X$ ve $\forall\ \alpha \in K$ için

(N1) $\|x\| \geq 0$

(N2) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\ \|x\|$

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde norm adı verilir. $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı denir. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı kısaca X ile gösterilir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.4 (Yarı norm) Bir X vektör uzayı üzerinde $(N1)$, $(N3)$, $(N4)$ aksiyomlarını gerçekleyen bir $p : X \to \mathbb{R}$ dönüşümüne bir yarı norm denir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.5 (Sürekli dual uzay) X normlu bir uzay olsun. X üzerindeki tüm sınırlı lineer fonksiyonellerden oluşan küme,

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in X \\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

ile tanımlanan norma sahip olan, normlu bir uzay oluşturur. Bu uzaya X 'in dual uzayı denir X' sembolü ile gösterilir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.6 (Bernstein Polinomları) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ olsun. f fonksiyonunun $n-$inci $(n \in \mathbb{N})$ Bernstein polinomu

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

olarak tanımlanır (Lorentz 1953).

Teorem 2.1 (Bernstein Teoremi) $f \in C[0,1]$ olsun. Bu durumda f için elde edilen Bernstein polinomlarının dizisi $[0,1]$ üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Yani

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n f - f\|_{C[a,b]} = 0$$

olur (Lorentz 1953).

Teorem 2.2 (Korovkin Teoremi) $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$, $L_n : C[a,b] \to C[a,b]$ şeklinde lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olmak üzere, $i = 0,1,2$ için

$$\lim_{n\to\infty} (L_n t^i)(x) = x^i \tag{2.1}$$

yakınsaması $[a,b]$ aralığında düzgün olsun. Bu durumda her $f \in C[a,b]$ için

$$\lim_{n\to\infty} (L_n f)(x) = f(x)$$

yakınsaması $[a,b]$ aralığında düzgündür (Paltanea 2004).

Uyarı 2.1 E, reel sayıların bir alt kümesi, $m(E)$ de bu kümenin Lebesgue ölçüsünü göstersin. Bu durumda, aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. Aralık boyu: Her I aralığı için $m(I) = l(I)$ (I sınırlı bir aralık ise aralığın boyu $l(I) = b - a$, sınırsız bir aralık ise $l(I) = \infty$ şeklindedir.)

2. Monotonluk: Eğer $A \subset B \subset \mathbb{R}$ ise $0 \leq m(A) \leq m(B) \leq \infty$

3. Öteleme altında değişmezlik: $\mathbb{R}$ nin her A alt kümesi ve her $x_0 \in \mathbb{R}$ noktası için $A + x_0 := \{x + x_0 : x \in A\}$ ise $m(A + x_0) = m(A)$ olur.

4. Sayılabilir toplam: Eğer A ve B, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin ayrık alt kümeleri ise $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ şeklindedir. $\{A_i\}$ ayrık kümelerin bir dizisi ise $m(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ olur (Folland 1999).

Tanım 2.7 $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin her E alt kümesi için

$$m^*(E) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : \{I_k\} \text{ açık aralıkların bir dizisi ve } E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}$$

şeklinde tanımlanan dış ölçüsüne Lebesgue dış ölçüsü denir.

Burada her $E \subset \mathbb{R}$ için $0 \leq m^*(E) \leq \infty$ olduğu açıktır (Folland 1999).

Tanım 2.8 E bir nokta kümesi ve M; hiçbir tek noktadan oluşmayan kapalı aralıkların bir ailesi olsun. Her $x \in E$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$x \in d, \quad md < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $d \in M$ kapalı aralığı var ise, E kümesi M ailesi tarafından Vitali anlamında örtülür denir.

Diğer bir ifadeyle E kümesinin her noktası M ailesine ait keyfi küçük kapalı aralıklarda içeriliyorsa E kümesi Vitali anlamında M ailesi tarafından örtülür denir (Natanson 1964).

Aşağıdaki teorem fonksiyonlar teorisinde pek çok uygulamaya sahiptir.

Teorem 2.3 (Vitali Örtme Teoremi) Eğer sınırlı bir E kümesi Vitali anlamında kapalı aralıkların bir M ailesi tarafından örtülüyorsa M ailesinde sonlu veya sayılabilir, kapalı $\{d_k\}$ aralıklarının bir ailesi

$$d_k \cap d_i = 0 \;\; (k \neq i), \qquad m^*\left[E - \sum_k d_k\right] = 0$$

sağlanacak şekilde bulunur (Natanson 1964).

Tanım 2.9 (Türevlenmiş sayı) h_1, h_2, h_3, ...$(h_n \neq 0)$ şeklindeki sıfıra giden bir dizi olsun ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = \lambda$$

şartını sağlayacak şekilde λ (sonlu ya da sonsuz) sayısına f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevlenmiş sayısı denir ve $\lambda = Df(x_0)$ ile gösterilir (Natanson 1964).

Teorem 2.4 (Ayırma Teoremi) F_1 ve F_2 iki ayrık, kapalı ve sınırlı kümeler olsun. O halde

$$G_1 \supset F_1, \quad G_2 \supset F_2, \quad G_1 \cap G_2 = 0$$

şartını sağlayacak şekilde G_1 ve G_2 açık kümeleri bulunabilir (Natanson 1964).

Aşağıdaki monoton fonksiyonlarla ilgili temel kavramlar Natanson'un kitabından verilmiştir (Natanson 1964).

2.1 Monoton Fonksiyonlar

Tanım 2.10 f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı olsun. Bu aralıktan aldığımız $x \leq y$ şartını sağlayan her x, y elemanı için $f(x) \leq f(y)$ ise f fonksiyonu artandır denir. Eğer her

$x < y$ için $f(x) < f(y)$ oluyorsa f fonksiyonu kesin artan,

$x < y$ için $f(x) \geq f(y)$ oluyorsa f fonksiyonu azalan,

$x < y$ için $f(x) > f(y)$ oluyorsa f fonksiyonu kesin azalandır denir.

Tanım aralığının tamamı üzerinde artan veya azalan fonksiyona monotondur denir.

Eğer f fonksiyonu azalan ise $-f$ fonksiyonu artandır. Bu basit açıklama monoton fonksiyonları içeren pek çok problemde sadece artan fonksiyonların düşünülmesini sağlar. Monoton fonksiyonlar sonlu düşünülecektir.

Tanım 2.11 f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı artan bir fonksiyon ve

$$a \leq x_0 < b$$

olsun.

Burada $x_0, x_1, x_2, x_3, ...$ noktalarının oluşturduğu herhangi bir dizi için x_0 noktasına giden ve x_0 noktasının sağında kalan $x_1, x_2, x_3, ...$ noktalarının herhangi bir dizisi, yani

$$x_n \to x_0, \quad x_n > x_0$$

için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

limiti vardır ve sonludur. Bu limit

$$\inf\{f(x)\} \qquad (x_0 < x \leq b)$$

sayısından başka bir şey değildir. Dolayısıyla $\{x_n\}$ dizisinin seçiminden bağımsızdır ve

$$f(x_0 + 0)$$

ile gösterilir. Benzer olarak

$$f(x_0 - 0) \qquad (a < x_0 \leq b)$$

gösterimi de tanımlanabilir. Buradan

$$f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0) \qquad (a < x_0 < b)$$

olduğunu görmek kolaydır ve

$$f(a) \leq f(a + 0), \quad f(b - 0) \leq f(b)$$

gerçeklenir. O halde f fonksiyonunun x_0 noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$$

olmasıdır.

[$x_0 = a$ veya $x_0 = b$ için yalnızca $f(a+0)$ veya $f(b-0)$ tek taraflı limiti düşünülebilir.]

$$f(x_0) - f(x_0 - 0); \quad f(x_0 + 0) - f(x_0)$$

sayıları x_0 noktasında f fonksiyonunun sırasıyla sol ve sağ sıçramasıdır ve bu sıçramaların $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ şeklindeki toplamına f fonksiyonunun x_0 noktasındaki sıçraması denir.

[a ve b noktaları için sadece tek taraflı sıçramaları düşünülebilir.]

Lemma 2.1 f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında tanımlı artan bir fonksiyon olsun. x_1, $x_2, ..., x_n$ noktaları (a,b) aralığında yer alan keyfi noktalar olmak üzere

$$[f(a+0)-f(a)]+\sum_{k=1}^{n}[f(x_k+0)-f(x_k-0)]+[f(b)-f(b-0)]\leq f(b)-f(a) \tag{2.2}$$

gerçeklenir.

İspat. Kabul edelim ki $a=x_0$, $b=x_{n+1}$ olmak üzere

$$a<x_1<x_2<...<x_n<b$$

olsun ve y_0, $y_1, ...,$ y_n noktalarını

$$x_k<y_k<x_{k+1} \qquad (k=0,\ 1,\ ...,\ n)$$

olacak şekilde seçelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} f(x_k+0)-f(x_k-0) &\leq f(y_k)-f(y_{k-1}) \qquad (k=1,\ 2,\ ...,\ n) \\ f(a+0)-f(a) &\leq f(y_0)-f(a) \\ f(b)-f(b-0) &\leq f(b)-f(y_n) \end{aligned}$$

gerçeklenir.

Tüm bu eşitsizlikler toplanarak (2.2) ifadesi elde edilir. ■

Sonuç 2.1 $[a,b]$ aralığında tanımlı artan bir f fonksiyonunun sadece sonlu sayıda süreksizlik noktası vardır. Fonksiyonun bu noktalardaki sıçraması, verilen bir σ pozitif sayısından büyüktür. Eğer x_1, ..., x_n noktaları $[a,b]$ aralığındaki σ sayısından büyük sıçrama süreksizlik noktaları ise (2.2) eşitsizliğinden

$$n\sigma\leq f(b)-f(a)$$

gerçeklenir ve dolayısıyla n keyfi büyük bir sayı olamaz.

Teorem 2.5 $[a,b]$ aralığında tanımlı artan bir f fonksiyonunun süreksizlik noktalarının kümesi sayılabilir sayıdadır. Eğer x_1, x_2, x_3, ... tüm iç süreksizlik noktaları ise

$$[f(a+0)-f(a)]+\sum_{k=1}^{\infty}[f(x_k+0)-f(x_k-0)]+[f(b)-f(b-0)]\leq f(b)-f(a) \tag{2.3}$$

gerçeklenir.

İspat. f fonksiyonunun tüm süreksizlik noktalarının kümesini H ile, bu süreksizlik noktalarının, sıçraması $\frac{1}{k}$ dan büyük olanlarını da H_k ile gösterelim. Burada

$$H = H_1 + H_2 + H_3 + ...$$

şeklindedir ve H kümesinin sayılabilirliği her bir H_k kümesinin sonlu olması gerçeğinden elde edilir.

(2.2) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alınarak (2.3) eşitsizliği elde edilir. ■

Tanım 2.12 f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı artan bir fonksiyon olsun.

$$\begin{aligned} s(a) &= 0; \\ s(x) &= [f(a+0) - f(a)] + \sum_{x_k<x}^{\infty} [f(x_k+0) - f(x_k-0)] + \\ &\quad + [f(x) - f(x-0)] \qquad (a < x \leq b) \end{aligned}$$

ile ifade edilen s fonksiyonuna f fonksiyonunun sıçrama fonksiyonu denir. s fonksiyonunun artan olduğu açıktır.

Teorem 2.6 Artan bir fonksiyon ve sıçrama fonksiyonunun

$$\varphi(x) = f(x) - s(x)$$

farkı da artan ve sürekli bir fonksiyondur.

İspat. $a \leq x < y \leq b$ olsun. Eğer (2.3) eşitsizliği $[a, b]$ aralığının yerine $[x, y]$ aralığına uygulanırsa

$$s(y) - s(x) \leq f(y) - f(x) \tag{2.4}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da

$$\varphi(x) \leq \varphi(y)$$

bulunur, yani φ artan bir fonksiyondur.

Ayrıca eğer (2.4) eşitsizliğinde y, x noktasına yaklaşırsa

$$s(x+0) - s(x) \leq f(x+0) - f(x) \tag{2.5}$$

elde edilir.

Diğer yandan $x < y$ için

$$f(x+0) - f(x) \leq s(y) - s(x)$$

eşitsizliği s fonksiyonunun tanımından kolaylıkla görülebilir. Burada $y \to x$ için limit alınırsa

$$f(x+0) - f(x) \leq s(x+0) - s(x)$$

elde edilir. Buradan ve (2.5) eşitsizliğinden

$$f(x+0) - f(x) = s(x+0) - s(x)$$

olacağı açıktır. Dolayısıyla

$$\varphi(x+0) = \varphi(x)$$

olur. Benzer bir şekilde $\varphi(x-0) = \varphi(x)$ olduğu da gösterilebilir. O halde buradan φ fonksiyonunun sürekli bir fonksiyon olduğu sonucu çıkıyor. ■

3. SINIRLI SALINIMLI FONKSİYONLAR

Bu bölümde monoton fonksiyonlarla yakından ilişkili, önemli bir fonksiyon sınıfı olan sınırlı salınımlı fonksiyonlarla ilgili temel kavramlar verilecektir (Natanson 1964).

Tanım 3.1 f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde tanımlı ve reel değerli olsun. $[a, b]$ aralığını

$$P: \; a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

noktaları yardımıyla alt aralıklara bölelim ve

$$V := V(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

toplamını oluşturalım. Burada tüm olası V toplamlarının kümesinin en küçük üst sınırına $[a, b]$ üzerinde f fonksiyonunun toplam salınımı denir ve $V_{[a,b]}[f]$ veya $\bigvee_a^b (f)$ ile gösterilir. Yani

$$V_{[a,b]}[f] = \sup_P V(f, P)$$

şeklindedir. Eğer

$$V_{[a,b]}[f] < \infty$$

ise f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sınırlı salınımlıdır denir. Buradaki $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ noktalarının kümesine $[a, b]$ aralığının bir parçalanması denir.

Teorem 3.1 $[a, b]$ aralığında tanımlı monoton bir fonksiyon $[a, b]$ aralığında sınırlı salınımlıdır.

İspat. Teoremi artan bir fonksiyon için ispatlamak yeterlidir. Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde artan ise tüm
$f(x_{k+1}) - f(x_k)$ farkı negatif olmayandır ve

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ f(x_{k+1}) - f(x_k) \right\} = f(b) - f(a)$$

şeklindedir. Bu da teoremi ispatlar. ■

Sınırlı salınımlı fonksiyonlara örnek olarak Lipschitz koşulunu sağlayan fonksiyonlar verilebilir.

Tanım 3.2 f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde tanımlı ve reel değerli olsun. $[a,b]$ aralığında herhangi iki x ve y noktası için

$$|f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y|$$

olacak şekilde bir K sabiti varsa f fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlar denir.

Eğer f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığının her noktasında f' türevi var ve f' sınırlı ise ortalama değer teoreminden

$$f(x) - f(y) = f'(z)(x - y) \qquad (x < z < y)$$

olur ve f fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlar. Bu durumda

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq K(x_{k+1} - x_k)$$

olacağından

$$V \leq K(b - a)$$

gerçeklenir ve f sınırlı salınımlı bir fonksiyon olur.

Örnek 3.1 Toplam salınımı sonlu olmayan sürekli bir fonksiyona

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{\pi}{2x} \ , & 0 < x \leq 1 \\ 0 \ , & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu örnek verilebilir. Eğer $[0,1]$ aralığının

$$0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < ... < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$$

şeklindeki bir parçalanması alınırsa

$$V = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$$

olur. Bu gibi parçalanmalar üzerinden supremuma geçilirse

$$V_{[0,1]}\,[f] = \infty$$

elde edilir.

Teorem 3.2 $[a,b]$ üzerinde sınırlı salınımlı her fonksiyon $[a,b]$ üzerinde sınırlıdır.

İspat. $[a,b]$ aralığının $P : a < x < b$ parçalanması için

$$V = V(f,P) = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq V_{[a,b]}[f]$$

olacağından

$$|f(x) - f(a)| \leq V \leq V_{[a,b]}[f]$$

yazılabilir. Böylece

$$|f(x)| \leq |f(a)| + V_{[a,b]}[f]$$

bulunur ve teorem gerçeklenir. ■

Teorem 3.3 Sınırlı salınımlı iki fonksiyonun toplamı, farkı ve çarpımı da sınırlı salınımlıdır.

İspat. f ve g fonksiyonları $[a,b]$ üzerinde tanımlı, sınırlı salınımlı fonksiyonlar olsun ve toplamlarını s ile gösterelim. O halde

$$|s(x_{k+1}) - s(x_k)| \leq |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |g(x_{k+1}) - g(x_k)|$$

yazılabilir ve buradan da

$$V_{[a,b]}[s] \leq V_{[a,b]}[f] + V_{[a,b]}[g]$$

olur. Böylece s, sınırlı salınımlı fonksiyondur. $f - g$ farkının da sınırlı salınımlı olduğu benzer şekilde ispatlanabilir.
Şimdi kabul edelim ki f ve g sınırlı salınımlı fonksiyonlar ve

$$p(x) = f(x)g(x)$$

olsun.

$$A = \sup\{|f(x)|\}, \qquad B = \sup\{|g(x)|\}$$

$[a,b]$ üzerinde alınan supremumlar ise

$$\begin{aligned} |p(x_{k+1}) - p(x_k)| &\leq |f(x_{k+1})g(x_{k+1}) - f(x_k)g(x_{k+1})| + |f(x_k)g(x_{k+1}) - f(x_k)g(x_k)| \\ &\leq B\,|f(x_{k+1}) - f(x_k)| + A\,|g(x_{x+1}) - g(x_k)| \end{aligned}$$

olur.

Buradan

$$V_{[a,b]}\left[p\right] \leq BV_{[a,b]}\left[f\right] + AV_{[a,b]}\left[g\right]$$

sağlanır. Dolayısıyla p, $[a,b]$ aralığında sınırlı salınımlıdır. ■

Buradan aşağıdaki sonucu ispatsız verelim.

Teorem 3.4 Eğer f ve g sınırlı salınımlı fonksiyonlar ve $g(x) \geq \sigma > 0$ ise $\dfrac{f}{g}$ bölümü de sınırlı salınımlı bir fonksiyondur.

Teorem 3.5 f, $[a,b]$ üzerinde tanımlı ve reel değerli bir fonksiyon ve $a < c < b$ olsun. O halde

$$V_{[a,b]}\left[f\right] = V_{[a,c]}\left[f\right] + V_{[c,b]}\left[f\right] \tag{3.1}$$

gerçeklenir.

İspat. $[a,c]$ ve $[c,b]$ aralıklarının her birini

$$y_0 = a < y_1 < ... < y_m = c; \qquad z_0 = c < z_1 < ... < z_n = b$$

noktaları yardımıyla alt aralıklara bölelim ve

$$V_1 = \sum_{k=0}^{m-1} \left|f(y_{k+1}) - f(y_k)\right|, \qquad V_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \left|f(z_{k+1}) - f(z_k)\right|$$

toplamlarını oluşturalım. $\{y_k\}$ ve $\{z_k\}$ noktaları tüm $[a,b]$ aralığını böler. Eğer V, bu parçalanmaya karşılık gelen

$$V = V_1 + V_2$$

şeklinde bir toplam ise

$$V_1 + V_2 \leq V_{[a,b]}\left[f\right]$$

olur ve

$$V_{[a,c]}\left[f\right] + V_{[c,b]}\left[f\right] \leq V_{[a,b]}\left[f\right] \tag{3.2}$$

gerçeklenir. Şimdi $[a,b]$ aralığının

$$x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$$

yardımıyla tanımlanan parçalanması alınırsa, parçalanmanın bir noktası olarak c noktasının içerilmesi gerektiğine dikkat edilmelidir.

$c = x_m$ yazılarak V toplamı, yukarıdaki parçalanmaya karşılık gelecek şekilde

$$V = \sum_{k=0}^{m-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + \sum_{k=m}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

formunda yazılabilir. V_1 ve V_2, $[a, c]$ ve $[c, b]$ aralıklarına karşılık gelecek şekildeki toplamlar olmak üzere V toplamı daha kısa olarak

$$V = V_1 + V_2$$

yazılabilir. Sonuç olarak

$$V \leq V_{[a,c]}[f] + V_{[c,b]}[f] \tag{3.3}$$

olur. (3.3) eşitsizliği, parçalanmanın bir noktası c olan parçalanmalara karşılık gelecek şekildeki V toplamları için inşa edilmiştir. Bu parçalanmalara yeni noktalar eklendiğinde V toplamını azaltmayacağı için tüm V toplamları için (3.3) eşitsizliği gerçeklenir. Buradan

$$V_{[a,b]}[f] \leq V_{[a,c]}[f] + V_{[c,b]}[f] \tag{3.4}$$

olduğu açıkça görülür.

O halde (3.2) ve (3.4) eşitsizliğinden (3.1) elde edilir. ■

Sonuç 3.1 $a < c < b$ olsun. Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sınırlı salınımlı ise $[a, c]$ ve $[c, b]$ aralıklarında da sınırlı salınımlıdır ve karşıtı da doğrudur.

Sonuç 3.2 Eğer $[a, b]$ aralığının tamamı, f fonksiyonunun monoton olduğu sonlu sayıda alt parçalara bölünebiliyorsa f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sınırlı salınımlıdır.

Teorem 3.6 $[a, b]$ üzerinde tanımlı ve reel değerli bir f fonksiyonunun sınırlı salınımlı olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun iki artan fonksiyonun farkı şeklinde yazılabilmesidir.

İspat. Teorem 3.1 ve Teorem 3.3 den yeter koşul sağlanır. Gerek şartı ispatlamak için

$$\begin{aligned} \pi(x) &= V_{[a,x]}[f] \qquad (a < x \leq b) \\ \pi(a) &= 0 \end{aligned}$$

fonksiyonunu alalım.

Teorem 3.5 den π artan bir fonksiyondur. Ayrıca

$$\nu(x) = \pi(x) - f(x) \tag{3.5}$$

fonksiyonu oluşturulursa diğer ν artan fonksiyonu elde edilmiş olur.

Gerçekten, eğer $a \leq x < y \leq b$ ise Teorem 3.5 den

$$\nu(y) = \pi(y) - f(y) = \pi(x) + V_{[x,y]}[f] - f(y)$$

olur. Dolayısıyla

$$\nu(y) - \nu(x) = V_{[x,y]}[f] - [f(y) - f(x)] .$$

gerçeklenir. Aynı zamanda toplam salınımın tanımından

$$f(y) - f(x) \leq V_{[x,y]}[f]$$

olduğu açıkça görülür. Buradan

$$\nu(y) - \nu(x) \geq 0$$

olur. O halde ν artan bir fonksiyondur. f fonksiyonunun

$$f(x) = \pi(x) - \nu(x)$$

şeklindeki istenilen gösterimi (3.5) eşitliğinden elde edilir. ■

Sonuç 3.3 Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sınırlı salınımlı ise $[a, b]$ aralığının hemen hemen her noktasında f' türevi vardır ve sonludur. Ayrıca f', $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyondur.

Sonuç 3.4 Sınırlı salınımlı bir fonksiyonun süreksizlik noktalarının kümesi sayılabilir sayıdadır. Her x_0 süreksizlik noktasında

$$\begin{aligned} f(x_0 + 0) &= \lim_{x \to x_0^+} f(x) \\ f(x_0 - 0) &= \lim_{x \to x_0^-} f(x) \end{aligned}$$

limitleri vardır.

Şimdi de sınırlı salınımlı bir fonksiyonun, bir sıçrama ve bir sürekli fonksiyonun toplamı olarak yazılması problemini ele alalım. π ve ν fonksiyonlarından en azından birinin süreksizlik noktalarının oluşturduğu

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots \qquad (a < x_n < b) \tag{3.6}$$

şeklindeki dizi ve aşağıdaki sıçrama fonksiyonlarını alalım.

$$s_\pi(x) = [\pi(a+0) - \pi(a)] + \sum_{x_k<x} [\pi(x_k+0) - \pi(x_k-0)] + [\pi(x) - \pi(x-0)]$$

$$(a < x \leq b)$$

$$s_\nu(x) = [\nu(a+0) - \nu(a)] + \sum_{x_k<x} [\nu(x_k+0) - \nu(x_k-0)] + [\nu(x) - \nu(x-0)]\ ;$$

ayrıca

$$s_\pi(a) = s_\nu(a) = 0$$

olsun. (Eğer bir x_k noktası π ve ν fonksiyonlarından birinin bir süreklilik noktası ise onlara karşılık gelen sıçramaları da sıfır olur. Ayrıca ν fonksiyonunun bir süreksizlik noktasının π fonksiyonunun bir süreklilik noktası olamayacağı gösterilebilir, fakat bu pek önemli değildir.)

$$s(x) = s_\pi(x) - s_\nu(x)$$

olsun. s fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$s(x) = [f(a+0) - f(a)] + \sum_{x_k<x} [f(x_k+0) - f(x_k-0)] + [f(x) - f(x-0)];$$

$$(a < x < b)$$

$$s(a) = 0.$$

s fonksiyonunun sınırlı salınımlı bir fonksiyon olduğu açıktır. Bu fonksiyon, f fonksiyonunun sıçrama fonksiyonudur. (3.6) dizisinden f fonksiyonunun sürekli olduğu noktalar çıkarılırsa s fonksiyonunun değişmeyeceği, tanımdan aşikardır. (3.6) dizisindeki x_k noktaları f fonksiyonunun tüm süreksizlik noktaları olarak kabul edilebilir. Bir artan fonksiyon ile onun sıçrama fonksiyonu arasındaki fark ile oluşturulan fonksiyon artan ve sürekli olduğundan

$$\pi(x) - s_\pi(x), \qquad \nu(x) - s_\nu(x)$$

fonksiyonları sürekli ve artan olur.

Buradan

$$\varphi(x) = f(x) - s(x)$$

farkı sürekli sınırlı salınımlı bir fonksiyondur.

Teorem 3.7 Sınırlı salınımlı her fonksiyon, kendisinin sıçrama fonksiyonu ve sürekli, sınırlı salınımlı bir fonksiyonun toplamı olarak yazılabilir.

3.1 Sürekli Sınırlı Salınımlı Fonksiyonlar

Teorem 3.8 f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı sınırlı salınımlı olsun. Eğer f fonksiyonu x_0 noktasında sürekli ise

$$\pi(x) = V_{[a,x]}[f]$$

fonksiyonu da x_0 noktasında süreklidir (Natanson 1964).

İspat. $x_0 < b$ olduğunu kabul edelim. Önce, π fonksiyonunun x_0 noktasında sağdan sürekli olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ keyfi bir sayı olsun. $[x_0, b]$ aralığını

$$x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

noktaları yardımıyla alt aralıklara bölelim. Böylece

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| > V_{[x_0,b]}[f] - \varepsilon \tag{3.7}$$

olur. Yeni noktalar eklendiğinde V toplamı sadece artan olacağından

$$|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$$

olduğu kabul edilebilir. (3.7) ifadesinden

$$V_{[x_0,b]}[f] < \varepsilon + \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| < 2\varepsilon + \sum_{k=1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq 2\varepsilon + V_{[x_1,b]}[f]$$

gerçeklenir. Dolayısıyla

$$V_{[x_0,x_1]}[f] < 2\varepsilon$$

olur ve sonuç olarak

$$\pi(x_1) - \pi(x_0) < 2\varepsilon$$

yazılır.

Buradan da

$$\pi(x_0 + 0) - \pi(x_0) < 2\varepsilon$$

gerçeklenir. ε keyfi olduğu için

$$\pi(x_0 + 0) = \pi(x_0)$$

olur. Benzer şekilde

$$\pi(x_0 - 0) = \pi(x_0)$$

olduğu da kolaylıkla gösterilebilir. Yani π fonksiyonu $x_0 > a$ ise x_0 noktasında soldan sürekli olur. ■

Sonuç 3.5 Sürekli sınırlı salınımlı bir fonksiyon iki sürekli artan fonksiyonun farkı olarak yazılabilir. Gerçekten, eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı sürekli sınırlı salınımlı ise artan parçaların

$$\pi(x) = V_{[a,x]}[f] \text{ ve } \nu(x) = \pi(x) - f(x)$$

ikisi de süreklidir (Natanson 1964).

3.2 Sınırlı Salınımlı Fonksiyonların Uzayı

$[a, b]$ aralığında sınırlı salınımlı fonksiyonların uzayını $BV[a, b]$ ile ve sınırlı fonksiyonların uzayını da $B[a, b]$ ile gösterelim. Bu kısımda, fonksiyonların alışılmış toplama ve skaler ile çarpma işlemlerine göre $BV[a, b]$ uzayının bir lineer uzay ve üzerinde tanımlanan norma göre bir Banach uzayı olduğu gösterilecektir (Nair 2013).

$f \in BV[a, b]$ için aşağıdaki özellikler açıktır:

- $f \in BV[a, b] \iff V_{[a,b]}[f] < \infty$.
- $f \in BV[a, b]$ için

$$V_{[a,b]}[f] = 0 \iff f \text{ sabit bir fonksiyondur.}$$

Teorem 3.9 Eğer $f,\ g \in BV[a, b]$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ ise $f + g,\ \alpha f \in BV[a, b]$ olur. Buradan da

$$\begin{aligned} V_{[a,b]}[f + g] &\leq V_{[a,b]}[f] + V_{[a,b]}[g], \\ V_{[a,b]}[\alpha f] &= |\alpha| V_{[a,b]}[f] \end{aligned}$$

gerçeklenir.

İspat. $f,\ g \in BV[a,b]$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. $[a,b]$ aralığının her P parçalanması için

$$\begin{aligned} V(f+g,P) &\leq V(f,P)+V(g,P) \leq V(f)+V(g), \\ V(\alpha f,P) &= |\alpha|\, V(f,P) \end{aligned}$$

gerçeklenir. Tüm bu parçalanmalar üzerinden supremum alınırsa

$$\begin{aligned} V_{[a,b]}[f+g] &\leq V_{[a,b]}[f]+V_{[a,b]}[g], \\ V_{[a,b]}[\alpha f] &= |\alpha|\, V_{[a,b]}[f] \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $f+g,\ \alpha f \in BV[a,b]$ olur. ■

Teorem 3.2 de $[a,b]$ üzerinden supremuma geçilirse aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.6 Her $f \in BV[a,b]$ için

$$\sup_{a\leq x\leq b} |f(x)| \leq |f(a)| + V_{[a,b]}[f]$$

olur. Özellikle

$$BV[a,b] \subseteq B[a,b]$$

kapsaması vardır ve her $f \in BV[a,b]$ için

$$\|f\|_{\infty} \leq |f(a)| + V_{[a,b]}[f]$$

gerçeklenir.

Teorem 3.10 $BV[a,b]$ uzayı lineer bir uzaydır ve

$$\|f\|_{BV} := |f(a)| + V_{[a,b]}[f]$$

ifadesi $BV[a,b]$ uzayında bir norm tanımlar ve $BV[a,b]$ uzayı $\|f\|_{BV}$ normuna göre bir Banach uzayıdır.

İspat. Hatırlanacağı gibi $f \in BV[a,b]$ için $V_{[a,b]}[f]=0 \iff f$ sabit bir fonksiyondur. Dolayısıyla

$$\|f\|_{BV}=0 \iff f=0$$

olur. Sonuç 3.6 ve Teorem 3.9 dan; $BV[a,b]$ uzayının bir lineer uzay olduğu ve $\|\cdot\|_{BV}$ nin $BV[a,b]$ üzerinde bir norm olduğu elde edilir. Geriye, $BV[a,b]$ uzayının tam olduğunu göstermek kalır.

Bunun için, $\|\cdot\|_{BV}$ normuna göre bir (f_n) Cauchy dizisi alalım. Buradan $\forall\ \varepsilon > 0$ için bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı, $\forall\ m, n \geq N$ için

$$|f_n(a) - f_m(a)| + V_{[a,b]}[f_n - f_m] < \varepsilon \tag{3.8}$$

sağlanacak şekilde vardır. Dolayısıyla, Sonuç 3.6 dan (f_n), $BV[a,b]$ uzayında bir Cauchy dizisidir. $BV[a,b]$, $\|\cdot\|_\infty$ normuna göre Banach uzayı olduğu için $n \to \infty$ iken $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ olacak şekilde $f \in B[a,b]$ vardır. Özellikle, $n \to \infty$ iken $f_n \to f$ noktasaldır. Buradan, $[a,b]$ aralığının her P parçalanması ve

$$|f_n(a) - f(a)| + V(f_n - f, P) = \lim_{m\to\infty} \{|f_n(a) - f_m(a)|\} + V(f_n - f_m, P)$$

yazılabilir. Dolayısıyla (3.8) ifadesinden $\forall\ m, n \geq N$ için

$$|f_n(a) - f(a)| + V(f_n - f, P) \leq \varepsilon$$

sağlanır ve bu ifade $[a,b]$ aralığının tüm parçalanması için gerçeklendiğinden $f_n - f \in BV[a,b]$ olur ve özellikle, $f = f_n - (f_n - f) \in BV[a,b]$ ve $\forall\ n \geq N$ için

$$\|f_n - f\|_{BV} = |f_n(a) - f(a)| + V_{[a,b]}[f_n - f] \leq \varepsilon$$

gerçeklenir. O halde, (f_n) Cauchy dizisi, $\|\cdot\|_{BV}$ normuna göre $f \in BV[a,b]$ fonksiyonuna yakınsar. ■

Uyarı 3.1 $[a,b]$ aralığında sınırlı salınımlı fonksiyonların

$$\|f\|_{TV} := V_{[a,b]}[f]$$

yarı normu ile donatılan sınıfı $TV[a,b]$ ile gösterilecektir.

3.3 Riemann-Stieltjes İntegrali

Bu kısımda, Riemann integralinin önemli bir genellemesi olan Riemann-Stieltjes integrali ele alınacaktır (Natanson 1964).

Tanım 3.3 f ve g fonksiyonları $[a,b]$ aralığında tanımlı olsunlar. $[a,b]$ aralığını

$$P : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

noktaları yardımıyla alt aralıklara bölelim.

$k = 0, 1, ..., n-1$ için $[x_k, x_{k+1}]$ aralığından bir ξ_k noktası seçelim ve

$$\sigma =: \sigma(f, P, \xi_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)]$$

toplamını oluşturalım. Eğer

$$\lambda = \max(x_{k+1} - x_k) \to 0$$

iken σ toplamı, parçalanma ve ξ_k noktalarının seçiminden bağımsız olarak sonlu bir I limitine giderse bu limite f fonksiyonunun g fonksiyonuna göre Riemann-Stieltjes integrali denir ve

$$\int_a^b f(x)dg(x) \ veya \ (S)\int_a^b f(x)dg(x)$$

ile gösterilir.

Bu tanım, aşağıdaki anlamdadır: Eğer, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta > 0$ sayısı; keyfi bir parçalanma için $\lambda < \delta$ iken $|\sigma - I| < \varepsilon$ eşitsizliği, ξ_k noktalarının her seçimi için sağlanacak şekilde varsa, I sayısına f fonksiyonunun g fonksiyonuna göre Stiletjes integrali denir. $g(x) = x$ için Stieltjes integralinin özel bir hali olan Riemann integrali elde edilir.

Stieltjes integralinin aşağıda verilen özellikleri açıktır.

1. $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\, dg(x) = \int_a^b f_1(x)dg(x) + \int_a^b f_2(x)dg(x)$,
2. $\int_a^b f(x)d\,[g_1(x) + g_2(x)] = \int_a^b f(x)dg_1(x) + \int_a^b f(x)dg_2(x)$,
3. Eğer k ve l sabitler ise $\int_a^b kf(x)dlg(x) = kl\int_a^b f(x)dg(x)$,
4. Eğer $a < c < b$ ve

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x) \tag{3.9}$$

eşitliğindeki integraller varsa (3.9) eşitliği gerçeklenir.

Bu son özelliği ispatlamak için, $\int_a^b fdg$ integrali için σ toplamını oluştururken sadece c noktasının parçalanmanın noktaları içinde olduğunu görmek gereklidir.

$\int_a^b fdg$ integralinin varlığı $\int_a^c fdg$ ve $\int_c^b fdg$ integrallerinin her ikisinin de varlığını gerektirdiğini ispatlamak zor değildir fakat bunun üzerinde durulmayacaktır. Karşıt durumun geçerli olmayacağını göstermek daha ilginçtir.

Örnek 3.2 f ve g fonksiyonları $[-1, 1]$ aralığında tanımlı

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklindeki fonksiyonlar olsunlar.

$$\int_{-1}^{0} f(x)dg(x), \quad \int_{0}^{1} f(x)dg(x)$$

integrallerinin mevcut olduğu kolaylıkla görülebilir (Çünkü tüm σ toplamları sıfıra eşittir). Fakat aynı zamanda

$$\int_{-1}^{1} f(x)dg(x)$$

integrali mevcut değildir. Özel olarak $[-1, 1]$ aralığını, 0 noktası parçalanmanın bir noktası olmayacak şekilde alt aralıklara bölelim ve

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\left[g(x_{k+1}) - g(x_k)\right]$$

toplamını oluşturalım. Eğer $x_i < 0 < x_{i+1}$ ise yalnız i. terim σ toplamında kalır, çünkü eğer x_k ve x_{k+1} noktaları 0 noktasının aynı tarafında yer alırsa $g(x_k) = g(x_{k+1})$ olur. Bu,

$$\sigma = f(\xi_i)\left[g(x_{i+1}) - g(x_i)\right] = f(\xi_i)$$

olmasını gerektirir. $\xi_i \leq 0$ veya $\xi_i > 0$ olmasına bağlı olarak

$$\sigma = 0 \text{ veya } \sigma = 1$$

olur ve böylece σ toplamı limite sahip değildir.

Sonuç 3.7 $\int_a^b f(x)dg(x)$ ve $\int_a^b g(x)df(x)$ integrallerinin birinin varlığı diğerinin varlığını gerektirir. Bu durumda

$$\int_a^b f(x)dg(x) + \int_a^b g(x)df(x) = \left[f(x)g(x)\right]_a^b \tag{3.10}$$

gerçeklenir.

Burada

$$[f(x)g(x)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a) \tag{3.11}$$

(3.10) ifadesi kısmi integrasyon formülüdür.

İspat. Kabul edelim ki $\int_a^b g(x)df(x)$ mevcut olsun. $[a, b]$ aralığını alt aralıklara bölelim ve

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\left[g(x_{k+1}) - g(x_k)\right]$$

toplamını oluşturalım. σ toplamı aynı zamanda

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)g(x_{k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)g(x_k)$$

şeklinde yazılabilir ve bu ifade

$$\sigma = -\sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\left[f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})\right] + f(\xi_{n-1})g(x_n) - f(\xi_0)g(x_0)$$

olur. (3.11) ifadesinde ekleme ve çıkarmalarla son eşitliğin sağ tarafı

$$\sigma = [f(x)g(x)]_a^b - \{g(a)\left[f(\xi_0) - f(a)\right] + \sum_{k=1}^{} g(x_k)\left[f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})\right] + g(b)\left[f(b) - f(\xi_{n-1})\right]\}$$

bulunur. Küme parantezleri içindeki ifade, $[a, b]$ aralığının parçalanma noktaları,

$$a \leq \xi_0 \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq \ldots \leq \xi_{n-1} \leq b$$

olan ve $a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ b$ noktaları, $[a, \xi_0]$, $[\xi_0, \xi_1]$, ..., $[\xi_{n-1}, b]$ kapalı aralıklarının noktaları olmak üzere, $\int_a^b gdf$ integrali için oluşturulan toplamdan başka bir şey değildir. $\max(x_{k+1} - x_k) \to 0$ iken

$$\max(\xi_{k+1} - \xi_k) \to 0$$

olur. Böylece küme parantezinin içindeki toplam $\int_a^b gdf$ integraline gider. Bu da ispatı tamamlar. ■

Stieltjes integralinin hangi koşullar altında var olduğunu düşünmek doğaldır. Bu doğrultuda, sadece aşağıdaki teorem verilecektir.

Teorem 3.11 Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve g fonksiyonu da bu aralıkta sınırlı salınımlı ise

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

integrali vardır.

İspat. g fonksiyonu artan kabul edilebilir, çünkü sınırlı salınımlı her fonksiyon iki artan fonksiyonun farkı şeklinde yazılabilir. $[a, b]$ aralığını

$$x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$$

noktaları yardımıyla alt aralıklara bölelim ve f fonksiyonunun $[x_k, x_{k+1}]$ aralığında en küçük ve en büyük değerlerini sırasıyla m_k ve M_k ile gösterelim.

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \left[g(x_{k+1}) - g(x_k)\right], \quad S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \left[g(x_{k+1}) - g(x_k)\right]$$

olsun. $[x_k, x_{k+1}]$ aralığında tüm ξ_k noktalarının seçimi için

$$s \leq \sigma \leq S \tag{3.12}$$

olacağı açıktır. Aynı zamanda, alt aralıklara yeni noktalar eklendiğinde s toplamı azalmaz, S toplamı artmaz. Buradan s toplamlarının hiçbiri herhangi bir S toplamını geçemez. Gerçekten $[a, b]$ aralığının I ve II parçalanmaları ve bunlara karşılık gelen s_1, S_1 ve s_2, S_2 toplamları alınırsa, bu durumda I ve II parçalanmalarındaki noktaların birleşimi ile oluşan III parçalanması oluşturulabilir. Bu parçalanmaya karşılık gelen s_3 ve S_3 toplamları için

$$s_1 \leq s_3 \leq S_3 \leq S_2$$

olur, böylece $s_1 \leq S_2$ bulunur.

Bunu aklımızda tutarak, tüm alt toplamların $\{s\}$ kümesinin en küçük üst sınırını I sembolü ile gösterelim: $I = \sup\{s\}$. Her parçalanma için

$$s \leq I \leq S$$

olur ve sonuç olarak (3.12) ifadesinden

$$|\sigma - I| < S - s$$

gerçeklenir. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ a karşılık bir $\delta > 0$ sayısı; $|x'' - x'| < \delta$ iken $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ olacak şekilde bulunabilirse, bu durumda $\lambda < \delta$ için

$$M_k - m_k < \varepsilon \qquad (k = 0, 1, ..., n-1)$$

olur.

Buna göre

$$S - s < \varepsilon\,[g(b) - g(a)]$$

yazılabilir. Buradan $\lambda < \delta$ için

$$|\sigma - I| < \varepsilon\,[g(b) - g(a)]$$

gerçeklenir. Diğer bir ifadeyle

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = I$$

olur. Böylece I, $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ integralidir.

Bu teoremden, sınırlı salınımlı her fonksiyonun sürekli her fonksiyona göre integrallenebilir olduğu elde edilir. ■

Teorem 3.12 Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve g fonksiyonu $[a,b]$ aralığının her noktasında bir Riemann integrallenebilir g' türevine sahipse

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = (R)\int_a^b f(x)g'(x)dx \tag{3.13}$$

gerçeklenir.

İspat. Teoremin koşullarından g, Lipschitz koşulunu sağlar dolayısıyla sınırlı salınımlıdır. Böylece (3.13) ifadesinin sol tarafındaki integral vardır. Diğer yandan, g' fonksiyonu ve fg' çarpımı hemen hemen her yerde süreklidir böylece (3.13) ifadesinin sağ tarafı da vardır. Buradan geriye (3.13) ifadesinin iki tarafının birbirine eşit olduğunu göstermek kalır. Bunun için $[a,b]$ aralığını

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

noktaları yardımıyla alt aralıklara bölelim.

Her $g(x_{k+1}) - g(x_k)$ farkına ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$g(x_{k+1}) - g(x_k) = g'(\bar{x}_k)(x_{k+1} - x_k) \qquad (x_k < \bar{x}_k < x_{k+1})$$

olur. $\int\limits_a^b fdg$ integrali için σ toplamı oluşturulurken ξ_k noktası için ortalama değer teoreminde ortaya çıkan x_k noktası alınabilir. Buradan σ toplamı

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k)g'(\bar{x}_k)(x_{k+1} - x_k)$$

olur.

Bu toplam fg' fonksiyonu için bir Riemann toplamıdır. Parçalanma inceltilerek ve limit alınarak (3.13) ifadesi elde edilir. ■

Teorem 3.13 f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve g fonksiyonu da

$$a < c_1 < c_2 < ... < c_m < b$$

olmak üzere (a,c_1), (c_1,c_2), ... , (c_m,b) aralıklarının her birinde sabit olsun. O halde

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dg(x) &= f(a)[g(a+0)-g(a)]+ \\ &+\sum_{k=1}^{m} f(c_k)\,[g(c_k+0)-g(c_k-0)]+f(b)\,[g(b)-g(b-0)] \end{aligned} \tag{3.14}$$

olur.

İspat.

$$\begin{aligned} V_{[a,b]}[g] &= |g(a+0)-g(a)|+\sum_{k=1}^{m}\{|g(c_k)-g(c_k-0)|+ \\ &+|g(c_k+0)-g(c_k)|\}+|g(b)-g(b-0)| \end{aligned}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Dolayısıyla g fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlı salınıma sahiptir. Böylece g fonksiyonu $[a,b]$ aralığının tüm alt aralıklarında sınırlı salınımlıdır.

O halde $c_0 = a$, $c_{m+1} = b$ yazılırsa

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \sum_{k=0}^{m} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dg(x) \tag{3.15}$$

olur. Geriye, $\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dg(x)$ integralini hesaplamak kalır. $[c_k, c_{k+1}]$ alt aralığı ve bu aralık için oluşturulan σ toplamı diğer terimler sıfıra gittiği için

$$\sigma = f(\xi_0)\,[g(c_k+0)-g(c_k)]+f(\xi_{n-1})\,[g(c_{k+1})-g(c_{k+1}-0)]$$

olur. Böylece

$$\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dg(x) = f(c_k)\,[g(c_k+0)-g(c_k)]+f(c_{k+1})\,[g(c_{k+1})-g(c_{k+1}-0)]$$

gerçeklenir. Buradan ve (3.15) eşitliğinden (3.14) elde edilir. ■

3.4 Riemann- Stieltjes İntegrali Altında Limite Geçme

Teorem 3.14 f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve g fonksiyonu da $[a,b]$ aralığında sınırlı salınımlı ise $M(f) := \max|f(x)|$ olmak üzere

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right| \leq M(f)V_{[a,b]}[g] \tag{3.16}$$

gerçeklenir.

İspat. $[a,b]$ aralığının bir parçalanması ve ξ_k noktalarının keyfi seçimi için

$$|\sigma| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)]\right| \leq M(f)\sum_{k=0}^{n-1}|g(x_{k+1}) - g(x_k)| \leq M(f)V_{[a,b]}[g]$$

olduğundan (3.16) elde edilir. ■

Teorem 3.15 g, $[a,b]$ aralığında tanımlı sınırlı salınımlı bir fonksiyon ve $f_n(x)$ de $[a,b]$ aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsayan sürekli fonksiyonların bir dizisi ise

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dg(x) = \int_a^b f(x)dg(x)$$

gerçeklenir.

İspat.

$$M(f_n - f) = \max|f_n(x) - f(x)|$$

olsun. (3.16) eşitsizliğinden

$$\left|\int_a^b f_n(x)dg(x) - \int_a^b f(x)dg(x)\right| \leq M(f_n - f)V_{[a,b]}[g]$$

gerçeklenir ve hipotezden

$$M(f_n - f) \to 0$$

olduğundan ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.16 (Helly'nin İlk Teoremi) $[a,b]$ aralığında tanımlı fonksiyonların sonsuz bir ailesi

$$F = \{f(x)\}$$

olsun. Ailedeki her fonksiyon ve her fonksiyonun toplam salınımı tek bir sayı ile sınırlı yani

$$|f(x)| \leq K, \quad V_{[a,b]}\,[f] \leq K$$

ise her $f \in F$ ailesinde, $[a,b]$ aralığının her noktasında sınırlı salınımlı bir φ fonksiyonuna yakınsayan $\{f_n(x)\}$ dizisi bulunabilir.

Teorem 3.17 (Helly'nin İkinci Teoremi) f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve $\{g_n(x)\}$, $[a,b]$ aralığının her bir noktasında, bir g sınırlı fonksiyonuna yakınsayan bir dizi olsun. Eğer her n için

$$V_{[a,b]}\,[g_n] < K$$

ise bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)dg_n(x) = \int_a^b f(x)dg(x) \tag{3.17}$$

gerçeklenir.

3.5 Lineer Fonksiyoneller

Tanım 3.4 g, $[a,b]$ aralığında tanımlı sınırlı salınımlı bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyon yardımıyla $[a,b]$ aralığında tanımlı sürekli her f fonksiyonu için

$$\Phi(f) = \int_a^b f(x)dg(x) \tag{3.18}$$

eşitliği oluşturulabilir.

Bu Φ fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri açıktır.
(1) $\Phi(f_1 + f_2) = \Phi(f_1) + \Phi(f_2)$
(2) $|\Phi(f)| \leq KM(f), \quad (M(f) = \max|f(x)|$ ve $K = V_{[a,b]}\,[g])$
$\Phi(f)$, $[a,b]$ aralığında tanımlı sürekli her f fonksiyonu için (1) ve (2) özelliklerini sağlayacak şekilde bir fonksiyon ise bu $\Phi(f)$ fonksiyonuna, $[a,b]$ aralığında tanımlı sürekli fonksiyonların uzayında sınırlı lineer fonksiyonel denir.

(3.18) ifadesinde oluşturulan Riemann-Stieltjes integrali $C[a,b]$ uzayında sınırlı lineer fonksiyoneldir. Bununla ilgili ünlü bir teorem ilk defa F. Riesz tarafından $C[a,b]$ uzayında yalnızca sınırlı lineer fonksiyoneller için ispatlanmıştır.
Teoremi ispatlamadan önce eğer $\Phi(f)$, $C[a,b]$ uzayında sürekli lineer fonksiyonel ise her k skaleri ve $f \in C[a,b]$ için

$$\Phi(kf) = k\Phi(f)$$

olduğunu belirtelim.

Teorem 3.18 (Riesz Gösterim Teoremi). $\Phi(f)$, $[a,b]$ aralığında tanımlı sürekli fonksiyonların $C[a,b]$ uzayı üzerinde sınırlı lineer bir fonksiyonel olsun. Bu durumda her $f \in C[a,b]$ için

$$\Phi(f) = \int_a^b f(x)dg(x) \tag{3.19}$$

olacak şekilde $[a,b]$ aralığında sınırlı salınımlı bir g fonksiyonu vardır.

İspat.

$$a = 0, \quad b = 1$$

olduğu durumu düşünmek yeterlidir. Çünkü genel durum, x değişkeninin bir lineer dönüşümünün kullanımı ile buna indirgenebilir. Binom açılımında $a = x$, $b = 1 - x$ alınırsa

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

olur. $x \in [0,1]$ için bu toplamın her terimi negatif olmayandır. Buradan, eğer

$$\varepsilon_k = \pm 1 \qquad (k = 0, 1, ..., n)$$

ise

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \leq 1 \tag{3.20}$$

olur. Şimdi $C[0,1]$ uzayının tüm f fonksiyonları için tanımlı lineer $\Phi(f)$ fonksiyonelini düşünelim.

Lineer fonksiyonel tanımından,

$$|\Phi(f)| \leq KM(f)$$

olacak şekilde bir K sayısı vardır. Buradan ve (3.20) eşitsizliğinden

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k \Phi\left[\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\right]\right| \leq K$$

gerçeklenir. ε_k sayılarının seçiminden dolayı son toplamın tüm terimleri negatif olmayandır. O halde buradan da

$$\sum_{k=0}^{n} \left|\Phi\left[\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\right]\right| \leq K \tag{3.21}$$

gerçeklenir. Şimdi de

$$\begin{array}{ll}
g_n(0) = 0 & \\
g_n(x) = \Phi\left[\binom{n}{0} x^0 (1-x)^{n-0}\right] & 0 < x < \frac{1}{n} \\
g_n(x) = \Phi\left[\binom{n}{0} x^0 (1-x)^{n-0}\right] + \Phi\left[\binom{n}{1} x^1 (1-x)^{n-1}\right] & \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n} \\
\ldots & \\
g_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \Phi\left[\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\right] & \frac{n-1}{n} \leq x < 1 \\
g_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \Phi\left[\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\right] &
\end{array}$$

şeklinde bir $g_n(x)$ merdiven fonksiyonu tanımlayalım. (3.21) ifadesinden $g_n(x)$ fonksiyonları ve toplam salınımları bir tek sayı ile sınırlı olurlar. Böylece Helly'nin ilk teoreminden $[0,1]$ aralığının her noktasında bir g sınırlı salınımlı fonksiyonuna yakınsayan $\{g_n(x)\}$ dizisinin bir $\left\{g_{n_j}(x)\right\}$ alt dizisi vardır. Eğer f, $[0,1]$ aralığında tanımlı herhangi bir sürekli fonksiyon ise Teorem 3.13 den

$$\int_0^1 f(x) dg_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \Phi\left[\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\right]$$

olur ve burada

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

f fonksiyonunun n. dereceden Bernstein polinomu olmak üzere

$$\int_0^1 f(x) dg_n(x) = \Phi\left[B_n(f;x)\right]$$

gerçeklenir.

Bernstein Teoreminden $n \to \infty$ iken

$$M(B_n f - f) \to 0$$

gerçeklenir, ayrıca sınırlı lineer fonksiyonel tanımından

$$|\Phi(B_n f) - \Phi(f)| = |\Phi(B_n f - f)| \leq KM\,|(B_n f - f)|$$

olur. Buna göre, $n \to \infty$ için

$$\Phi(B_n f) \to \Phi(f)$$

olup Helly'nin ikinci teoreminden

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)dg_n(x) = \int_0^1 f(x)dg(x)$$

gerçeklenir. Böylece

$$\Phi(f) = \int_0^1 f(x)dg(x)$$

olur. Bu da teoremi ispatlar. ■

3.6 Sınırsız Aralıkta Sınırlı Salınımlı Fonksiyonlar

Pek çok uygulamada özellikle olasılık teorisinde $(-\infty, \infty)$ sınırsız aralığında sınırlı salınımlı fonksiyonlar çok kullanışlıdır (Natanson 1964).

Tanım 3.5 f fonksiyonu $-\infty < x < \infty$ aralığındaki tüm x noktaları için tanımlı olsun. Eğer her $a < b$ için $V_{[a,b]}[f] < \infty$ ve $\sup\limits_{a<b} V_{[a,b]}[f]$ sonlu ise f fonksiyonuna $(-\infty, \infty)$ aralığında sınırlı salınımlıdır denir ve f fonksiyonunun toplam salınımı

$$\sup_{a<b} V_{[a,b]}[f] = V_{[-\infty,\infty]}[f]$$

ile gösterilir.

Teorem 3.19

$$V_{[-\infty,\infty]}[f] = \lim_{a\to\infty} V_{[-a,a]}[f]$$

İspat. Teoremin ispatı tanımdan açıktır. ■

Tanım 3.6 $V_{[-\infty,a]}[f]$ ve $V_{[a,\infty]}[f]$

$$\begin{aligned} V_{[-\infty,a]}[f] &= \lim_{b\to-\infty} V_{[b,a]}[f]\,; \\ V_{[a,\infty]}[f] &= \lim_{b\to\infty} V_{[a,b]}[f] \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

Bu durumda aşağıdaki teorem ispatsız olarak verilebilir.

Teorem 3.20 $a < b$ için

(1) $V_{[-\infty,b]}[f] = V_{[-\infty,a]}[f] + V_{[a,b]}[f]$

(2) $V_{[-\infty,\infty]}[f] = V_{[-\infty,a]}[f] + V_{[a,\infty]}[f]$

(3) $V_{[a,\infty]}[f] = V_{[a,b]}[f] + V_{[b,\infty]}[f]$

şeklindedir.

Teorem 3.21 f fonksiyonu $(-\infty,\infty)$ aralığında sınırlı salınımlı fonksiyon ise

$$\lim_{x\to-\infty} V_{[-\infty,x]}[f] = 0 \tag{3.22}$$

$$\lim_{x\to-\infty} V_{[x,\infty]}[f] = 0 \tag{3.23}$$

gerçeklenir.

İspat. (3.23) eşitliği için ispatı yapalım. $V_{[-\infty,\infty]}[f] = \sup_a V_{[-\infty,a]}[f]$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$V_{[-\infty,\infty]}[f] - \varepsilon < V_{[-\infty,a]}[f]$$

olacak şekilde bir a sayısı vardır. Ayrıca

$$V_{[-\infty,\infty]}[f] = V_{[-\infty,a]}[f] + V_{[a,\infty]}[f]$$

olur. Buradan da $V_{[a,\infty]}[f] < \varepsilon$ yazılabilir. Bu da (3.23) eşitliğini ispatlar. Benzer şekilde (3.22) eşitliği de gösterilebilir. ■

Teorem 3.22 Eğer $V_{[-\infty,\infty]}[f] < \infty$ ise f fonksiyonu sınırlıdır.

İspat. a herhangi bir sayı olmak üzere, her $x > a$ için

$$|f(x) - f(a)| \leq V_{[a,x]}[f] \leq V_{[-\infty,\infty]}[f]$$

olur. Benzer olarak, eğer $x < a$ ise

$$|f(a) - f(x)| \leq V_{[-\infty,\infty]}[f]$$

gerçeklenir. Dolayısıyla tüm $x \neq a$ için

$$|f(x)| \leq |f(a)| + V_{[-\infty,\infty]}[f]$$

olur. ■

Teorem 3.3 ve Teorem 3.4 ün, $(-\infty, \infty)$ aralığındaki sınırlı salınımlı fonksiyonlar için geçerli olduğu kolaylıkla görülebilir.

Teorem 3.23 f fonksiyonu $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı sınırlı salınımlı bir fonksiyon ise $\lim_{x\to-\infty} \pi(x) = 0$ olmak üzere f fonksiyonu

$$f(x) = \pi(x) - \nu(x)$$

şeklindeki iki sınırlı monoton artan fonksiyonun farkı olarak yazılabilir.

İspat. $\pi(x) = V_{[-\infty,x]}[f]$ ve $\nu(x) = \pi(x) - f(x)$ olsun. π fonksiyonunun artan olduğu açıktır ve Teorem 3.21 den $\lim_{x\to-\infty} \pi(x) = 0$ olur. ν fonksiyonunun monoton olduğunu göstermek için Teorem 3.6 daki yöntem kullanılabilir. ■

Uyarı 3.2 Teorem 3.23 ün karşıtı Teorem 3.3 ün açık bir sonucudur.

Sonuç 3.8 f fonksiyonu $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı sınırlı salınımlı bir fonksiyon ise $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ve $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ mevcuttur.

Teorem 3.6 daki Sonuç 3.3 ve Sonuç 3.4 $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı sınırlı salınımlı fonksiyonlar için geçerlidir. Teorem 3.7 de $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı sınırlı salınımlı fonksiyonlar için de geçerlidir. Bunun inşası aslında biraz daha basittir.

Her x için

$$s_\pi(x) = \sum_{x_k<x} [\pi(x_k+0) - \pi(x_k-0)] + [\pi(x) - \pi(x-0)]$$

ve

$$s_\nu(x) = \sum_{x_k<x} [\nu(x_k+0) - \nu(x_k-0)] + [\nu(x) - \nu(x-0)]$$

olsun. x_1, x_2, x_3, ..., noktaları π veya ν fonksiyonlarından en az birinin süreksizlik noktaları ise, $s(x) = s_\pi(x) - s_\nu(x)$ ve $\varphi(x) = f(x) - s(x)$ alarak φ, $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı sürekli sınırlı salınımlı bir fonksiyon olduğundan $f(x) = \varphi(x) + s(x)$ olur. Ayrıca, π ve ρ fonksiyonları $-\infty$ da limiti 0 olan monoton artan fonksiyonlar olmak üzere

$$a = \lim_{x\to-\infty} \nu(x) \text{ ve } \rho(x) = \nu(x) - a$$

alalım. Bu durumda

$$f(x) = \pi(x) - \rho(x) - a$$

olur. $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı sınırlı salınımlı g ve sınırlı sürekli f fonksiyonları için $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dg(x)$ Stieltjes integralinden bahsedilebilir ve

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dg(x) = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int\limits_{a}^{b} f(x)dg(x)$$

olarak tanımlanabilir. Kısmi integrasyon hariç, Kısım (3.3) ün teoremleri bu integral için benzerdir ve $a \to -\infty$, $b \to \infty$ a giderken limitler alınarak yapılmalıdır. Helly'nin ikinci teoremi $(-\infty, \infty)$ aralığındaki fonksiyonlar için geçerli değildir. Örneğin

$$\gamma(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

ve $g_n(x) = \gamma(x-n)$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ ise her x için $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} 1dg_n(x) = 1 \neq 0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} 1dg(x)$$

olur. Helly'nin ikinci teoreminin benzerini elde etmek için yeni bir fonksiyon sınıfı üretilmelidir.

Burada $-\infty < x < \infty$ aralığında tanımlı, sürekli ve $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ özelliğini sağlayan f fonksiyonlarının sınıfını C_∞ ile gösterelim.

Teorem 3.24 $\{g_n(x)\}$, $-\infty < x < \infty$ aralığında tanımlı olacak şekilde bir fonksiyon dizisi olsun. Her n için $V_{[-\infty,\infty]}[g_n] < K$ ve her x, $-\infty < x < \infty$ için $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ vardır. Her $f \in C_\infty$ için

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dg_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dg(x)$$

gerçeklenir.

İspat. Bu, Helly'nin ikinci teoreminin basit bir sonucudur. Öncelikle $V_{[-\infty,\infty]}[g] \le K$ açıktır. ε keyfi bir pozitif sayı olmak üzere bir A sayısı $|x| \ge A$ için $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{8K}$ olacak şekilde bulunabilir. Buradan da eğer φ, salınımı K dan küçük olan herhangi bir fonksiyon ise

$$\left| \int_{-\infty}^{-A} f(x)d\varphi(x) \right| < \frac{\varepsilon}{8K}$$

$K = \frac{\varepsilon}{8}$ olmak üzere

$$\left| \int_{A}^{\infty} f(x)d\varphi(x) \right| < \frac{\varepsilon}{8}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dg_n(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dg(x) \right| \\
\le &\left| \int_{-A}^{A} f(x)dg_n(x) - \int_{-A}^{A} f(x)dg(x) \right| + \\
&\left| \int_{-\infty}^{-A} f(x)dg_n(x) \right| + \left| \int_{-\infty}^{-A} f(x)dg(x) \right| + \left| \int_{A}^{\infty} f(x)dg_n(x) \right| + \left| \int_{A}^{\infty} f(x)dg(x) \right| \\
< &\left| \int_{-A}^{A} f(x)dg_n(x) - \int_{-A}^{A} f(x)dg(x) \right| + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Şimdi, sadece Helly'nin ikinci teoreminin uygulanması kalır. ■

Sonuç olarak, $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı sınırlı salınımlı fonksiyonlar için Riesz gösterim teoreminin benzerinden bahsedilmelidir.

Teorem 3.25 Φ, C_∞ uzayında tanımlı sınırlı lineer bir fonksiyonel olsun. Yani, her $f \in C_\infty$ için tanımlı bir $\Phi(f)$ fonksiyonu

$$\Phi(f_1 + f_2) = \Phi(f_1) + \Phi(f_2)$$

ve

$$|\Phi(f)| \leq A \max_x |f(x)|$$

olacak şekilde tanımlıdır. Bu durumda her $f \in C_\infty$ için

$$\Phi(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) dg(x)$$

olur.

4. MUTLAK SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Bu bölümde, sınırlı salınımlı fonksiyonların özel bir sınıfı olan mutlak sürekli fonksiyonların sınıfı alınacaktır. Bu fonksiyonlar, bir dizi uygulamalar için önemlidir (Natanson 1964).

Tanım 4.1 f, $[a,b]$ aralığında tanımlı, sınırlı bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı; $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq ... \leq a_n < b_n$ ve

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta \tag{4.1}$$

şartını sağlayan tüm a_1, b_1, ..., a_n, b_n sayıları için

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\{f(b_k) - f(a_k)\}\right| < \varepsilon \tag{4.2}$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde mutlak süreklidir denir.

Mutlak sürekli her fonksiyon süreklidir, burada $n = 1$ durumu, süreklilik tanımını verir. Ayrıca sürekli fonksiyonların mutlak sürekli olmadığı gösterilebilir.
Tanımın anlamı değiştirilmeden (4.1) koşulu

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon \tag{4.3}$$

şeklindeki daha güçlü (4.3) koşulu ile değiştirilebilir. Gerçekten, $\delta > 0$ sayısı

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\{f(b_k) - f(a_k)\}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliği, (4.1) den elde edilecek şekildeki bir sayı olsun. Buradan (4.1) eşitsizliği gerçeklenecek şekilde ikişerli ayrık açık $\{(a_k, b_k)\}$ $(k = 1, 2, ..., n)$ aralıklarının keyfi bir sistemi alınarak bu sistem A ve B parçalarına ayrılabilir. $f(b_k) - f(a_k) \geq 0$ olacak şekildeki (a_k, b_k) aralıkları A parçasına, geriye kalan tüm aralıkları da B parçasına koyulursa

$$\begin{aligned}
\sum_{A}|f(b_k) - f(a_k)| &= \left|\sum_{A}\{f(b_k) - f(a_k)\}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \\
\sum_{B}|f(b_k) - f(a_k)| &= \left|\sum_{B}\{f(b_k) - f(a_k)\}\right| < \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

O halde (4.3) ifadesi sağlanır. (4.3) toplamının tüm terimleri negatif olmayan ve keyfi sayıda olduğundan, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta > 0$ sayısı $\{(a_k, b_k)\}$ ikişerli ayrık açık aralıklarının keyfi bir sonlu veya sayılabilir sistemi için

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta$$

iken

$$\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

gerçeklenecek şekilde vardır.

$[a_k, b_k]$ aralıklarında f fonksiyonunun salınımları ile mutlak sürekliliğin tanımındaki $|f(b_k) - f(a_k)|$ artışlarını değiştirmek mümkündür. Bu iddiayı ispatlayalım. m_k ve M_k sırasıyla f fonksiyonunun $[a_k, b_k]$ aralığında en küçük ve en büyük değerleri olsun. Bu durumda, $[a_k, b_k]$ aralığında

$$f(\alpha_k) = m_k, \quad f(\beta_k) = M_k$$

olacak şekilde α_k ve β_k noktaları vardır. (α_k, β_k) aralıklarının boyları toplamı (a_k, b_k) aralıklarının boyları toplamından küçük ya da eşit olduğu için

$$\sum_k [f(\beta_k) - f(\alpha_k)] < \varepsilon$$

gerçeklenir. Dolayısıyla eğer f mutlak sürekli bir fonksiyon ise her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta > 0$ vardır öyle ki, ikişerli ayrık açık $\{(a_k, b_k)\}$ aralıklarının keyfi bir sonlu veya sayılabilir sistemi için

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta$$

iken

$$\sum_k \omega_k < \varepsilon$$

gerçeklenir. (ω_k, f fonksiyonunun $[a_k, b_k]$ aralığındaki salınımını göstermektedir.)

Lipschitz koşulunu sağlayan bir f fonksiyonu

$$|f(x'') - f(x')| \leq K\, |x'' - x'|$$

mutlak sürekli fonksiyona basit bir örnektir.

Teorem 4.1 f ve g mutlak sürekli fonksiyonlar ise toplamları, farkları ve çarpımları da mutlak süreklidir. Eğer g hiçbir yerde sıfır değilse $\frac{f}{g}$ bölümü de mutlak süreklidir.

İspat. Toplam ve farkın mutlak sürekliliği

$$|\{f(b_k) \pm g(b_k)\} - \{f(a_k) \pm g(a_k)\}| \leq |f(b_k) - f(a_k)| + |g(b_k) - g(a_k)|$$

ifadesinden elde edilir. Ayrıca eğer A ve B, $|f(x)|$ ve $|g(x)|$ için üst sınırlar ise

$$\begin{aligned} |f(b_k)g(b_k) - f(a_k)g(a_k)| &\leq |g(b_k)|\,|f(b_k) - f(a_k)| + +\,|f(a_k)|\,|g(b_k) - g(a_k)| \\ &\leq B\,|f(b_k) - f(a_k)| + A\,|g(b_k) - g(a_k)| \end{aligned}$$

eşitsizliğinden fg çarpımının mutlak sürekliliği elde edilir. Sonuç olarak eğer g hiçbir yerde sıfır değil ve $|g(x)| \geq \sigma > 0$ ise buradan

$$\left|\frac{1}{g(b_k)} - \frac{1}{g(a_k)}\right| \leq \frac{|g(b_k) - g(a_k)|}{\sigma^2}$$

elde edilir. $\frac{1}{g}$ fonksiyonu mutlak sürekli ve iki mutlak sürekli fonksiyonun çarpımı mutlak sürekli olduğundan $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ mutlak sürekli olur. ∎

Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli ve F de $[\min f, \max f]$ aralığında mutlak sürekli ise $F \circ f$ bileşke fonksiyonu mutlak sürekli olabilir veya olmayabilir. Burada şimdilik, $F \circ f$ fonksiyonunun mutlak sürekli olduğu iki basit koşul ile ilgilenilecektir.

Teorem 4.2 f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı, mutlak sürekli bir fonksiyon ve f fonksiyonunu tüm değerleri $[A, B]$ aralığında olsun. Eğer F, $[A, B]$ aralığında tanımlı, Lipschitz koşulunu sağlayan bir fonksiyon ise $F \circ f$ bileşke fonksiyonu $[A, B]$ aralığında mutlak süreklidir.

İspat. Eğer $|F(y'') - F(y')| \leq K\,|y'' - y'|$ ise (a_k, b_k) ikişerli ayrık açık aralıklarının keyfi bir sistemi için

$$\sum_{k=1}^{n} |F[f(b_k)] - F[f(a_k)]| \leq K \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)|$$

gerçeklenir. Bu eşitsizliğin sağ tarafı $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$ ile birlikte, istenildiği kadar küçük yapılabilir. ∎

Teorem 4.3 f, $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli ve kesin artan bir fonksiyon olsun. Eğer F, $[f(a), f(b)]$ aralığında mutlak sürekli ise $F \circ f$ bileşke fonksiyonu da $[a,b]$ aralığında mutlak süreklidir.

İspat. $\varepsilon > 0$ keyfi bir sayı ve $\delta > 0$; (A_k, B_k) ikişerli ayrık açık aralıklarının

$$\sum_{k=1}^{n}(B_k - A_k) < \delta$$

koşulunu sağlayan keyfi bir sistemi iken

$$\sum_{k=1}^{n}|F(B_k) - F(A_k)| < \varepsilon$$

gerçeklenecek şekildeki ε sayısına bağlı olan sayı olsun. Buradan, bu δ için bir $\eta > 0$ sayısı; (a_k, b_k) aralıkları ikişerli ayrık olma şartı ile

$$\sum_{k=1}^{m}(b_k - a_k) < \eta$$

iken

$$\sum_{k=1}^{n}[f(b_k) - f(a_k)] < \delta$$

olacak şekilde vardır. Şimdi, boylarının toplamı η dan küçük olan ve ikişerli ayrık, keyfi (a_k, b_k) aralıklarının bir sistemi incelenecektir. $(f(a_k), f(b_k))$ aralıkları da ikişerli ayrık olup, bunların uzunlukları toplamı δ dan küçüktür. Böylece

$$\sum_{k=1}^{m}|F[f(b_k)] - F[f(a_k)]| < \varepsilon$$

olur. Bu da ispatı tamamlar. ■

4.1 Mutlak Sürekli Fonksiyonlarin Diferensiyel Özellikleri

Teorem 4.4 Mutlak sürekli her fonksiyon sınırlı salınımlıdır.

İspat. f, $[a,b]$ aralığında tanımlı mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. Bir $\delta > 0$ sayısını; ikişerli ayrık $\{(a_k, b_k)\}$ açık aralıklarının her sistemi için

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$$

iken

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < 1$$

olacak şekilde seçelim. $[a, b]$ aralığını

$$c_0 = a < c_1 < c_2 ... < c_N = b$$

noktaları yardımıyla

$$c_{k+1} - c_k < \delta \qquad (k = 0,\ 1,\ ...,\ N-1)$$

olacak şekilde parçalara bölelim. Bu durumda, $[c_k, c_{k+1}]$ aralığının her parçalanması için f fonksiyonunun bu parçalanmalardaki mutlak artışlarının toplamı 1 den küçüktür. O halde

$$V_{[c_k, c_{k+1}]}[f] \leq 1$$

ve böylece

$$V_{[a,b]}[f] \leq N$$

olur. ∎

Sonuç 4.1 f, $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli bir fonksiyon ise f' türevi vardır ve $[a, b]$ aralığının hemen hemen her noktasında sınırlıdır. Ayrıca f' türevi $[a, b]$ aralığında integrallenebilirdir.

Teorem 4.5 Mutlak sürekli bir f fonksiyonunun f' türevi hemen hemen her yerde sıfır ise f fonksiyonu sabittir.

İspat. E, (a, b) aralığında $f'(x) = 0$ şartını sağlayan x noktalarının oluşturduğu küme olsun. $\varepsilon > 0$ alalım. Eğer $x \in E$ ise yeterince küçük her $h > 0$ için

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} < \varepsilon \tag{4.4}$$

olur. Buradan, $h > 0$ ve (4.4) koşulu sağlanacak şekildeki $[x, x+h]$ kapalı aralıkları E kümesini Vitali anlamında örter.

Dolayısıyla, bunlardan, (a,b) aralığında bulunan sonlu sayıda ikişerli ayrık

$$d_1 = [x_1, x_1 + h_1], \quad d_2 = [x_2, x_2 + h_2], \ ..., \quad d_n = [x_n, x_n + h_n]$$

kapalı aralıkları, E nin bu aralıklar tarafından kapsanmayan kısmının dış ölçüsü, keyfi bir $\delta > 0$ sayısından küçük olacak şekilde seçilebilir. Bu yolla elde edilen aralıkları genelliği bozmayacak şekilde $x_k < x_{k+1}$ şeklinde sıralayabiliriz. Eğer

$$[a, x_1), \quad (x_1 + h_1, x_2), \ ..., \ (x_{n-1} + h_{n-1}, x_n), \quad (x_n + h_n, b] \tag{4.5}$$

aralıkları $[a,b]$ aralığından tüm d_k $(k = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ aralıkları çıkarıldıktan sonra kalan aralıklar ise bu aralıkların boyları toplamı δ sayısından daha küçük kalacaktır. Buradan

$$b - a = mE \leq \sum_{k=1}^{n} md_k + m^* \left[E - \sum_{k=1}^{n} d_k \right] < \sum_{k=1}^{n} md_k + \delta$$

olur. Bu da

$$\sum_{k=1}^{n} md_k > b - a - \delta$$

olmasını gerektirir. Şimdi f fonksiyonunun mutlak sürekli olduğunu hatırlayalım. Dolayısıyla δ sayısı; (4.5) deki aralıklar üzerinde f fonksiyonunun artışlarının toplamı ε sayısından küçük kalacak şekilde seçilebilir. O halde

$$\left| \{f(x_1) - f(a)\} + \sum_{k=1}^{n-1} \{f(x_{k+1}) - f(x_k + h_k)\} + \{f(b) - f(x_n + h_n)\} \right| < \varepsilon \tag{4.6}$$

yazılabilir. Diğer taraftan, d_k aralıklarının tanımından

$$|f(x_k + h_k) - f(x_k)| < \varepsilon h_k$$

iken bulunur, buradan da

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \{f(x_k + h_k) - f(x_k)\} \right| < \varepsilon(b - a) \tag{4.7}$$

sonucuna ulaşılır ($\sum h_k = \sum md_k \leq b - a$).

Buradan (4.6) ve (4.7) eşitsizlikleri birleştirilirse, ε keyfi olduğu için

$$|f(b) - f(a)| < \varepsilon(1 + b - a)$$

olur.

Dolayısıyla

$$f(b) = f(a)$$

elde edilir. Bu durum $a < x \leq b$ olacak şekilde her $[a, x]$ aralığı için uygulanabilirdir.

Böylece keyfi $x \in [a, b]$ için $f(x) = f(a)$ olur. O halde f sabittir. ■

Sonuç 4.2 İki mutlak sürekli f ve g fonksiyonlarının f' ve g' türevleri birbirine denk ise bu fonksiyonların farkları sabittir.

Gerçekten, eğer $[a, b]$ aralığından f veya g fonksiyonlarından en az birinin sınırlı türeve sahip olmadığı veya türevlerinin eşit olmadığı noktaların kümesi (sıfır ölçülülerin) çıkarılırsa her kalan nokta için $[f(x) - g(x)]' = 0$ olur.

4.2 Belirsiz Lebesgue İntegrali

Tanım 4.2 $f(t)$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon olsun. C sabitinin her seçimi için

$$\Phi(x) = C + \int_a^x f(t)dt$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun belirsiz Lebesgue integrali denir. Buradaki belirsiz kavramı integralin değişken üst sınırını ifade eder.

Teorem 4.6 $\Phi(x)$ belirsiz integrali mutlak sürekli bir fonksiyondur.

İspat. Her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı; $me < \delta$ olacak şekilde her e ölçülebilir kümesi için

$$\left| \int_e f(t)dt \right| < \varepsilon$$

gerçeklenecek şekilde bulunabilir (Natanson 1964). Buradaki m, Lebesgue ölçüsünü göstermektedir. Özellikle, eğer (a_k, b_k) ikişerli ayrık açık aralıkların sonlu bir sisteminin boyları toplamı δ sayısından küçük ise, bu durumda

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} f(t)dt \right| < \varepsilon$$

olur.

$$\int_{a_k}^{b_k} f(t)dt = \Phi(b_k) - \Phi(a_k)$$

olduğu için

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \{\Phi(b_k) - \Phi(a_k)\}\right| < \varepsilon$$

gerçeklenir. Yani $\Phi(x)$ mutlak süreklidir. ■

Teorem 4.4 ün sonucundan $\Phi(x)$ fonksiyonu hemen hemen her yerde sınırlı türeve sahip ve bu türev, x değişkeninin integrallenebilir fonksiyonudur. Aşağıdaki teoremin gösterdiği gibi, bu türev tam olarak ifade edilebilir.

Teorem 4.7 f, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon olsun.

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

belirsiz integralinin $\Phi'(x)$ türevi $[a, b]$ aralığında hemen hemen her yerde f fonksiyonuna eşittir.

Teorem 4.8 Mutlak sürekli her fonksiyon kendi türevinin belirsiz integralidir.

İspat. $F(x)$ mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun hemen hemen her yerde $F'(x)$ türevi vardır ve integrallenebilirdir. O halde

$$\Phi(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt$$

yazılabilir. $\Phi(x)$ mutlak sürekli olup, bir önceki teoremden hemen hemen her yerde

$$\Phi'(x) = F'(x)$$

olur. Teorem 4.5 ün sonucundan $F(x) - \Phi(x)$ farkı sabittir.

$x = a$ için bu fark 0 olduğundan $F(x)$ ve $\Phi(x)$ fonksiyonları özdeş olmak zorundadır.

■

Teorem 4.7 önemli ölçüde kesinleştirebilir. İlk olarak bir tanım verelim.

Tanım 4.3 Eğer bir x noktasında

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{x}^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt=0$$

ise x noktasına $f(t)$ fonksiyonunun bir Lebesgue noktası denir.

Teorem 4.9 x, $f(t)$ fonksiyonunun bir Lebesgue noktası olsun. $\Phi(x)=\int\limits_{a}^{x}f(t)dt$ belirsiz integrali x noktasında diferensiyellenebilirdir ve $\Phi'(x)=f(x)$ olur.

İspat.

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}-f(x)=\frac{1}{h}\int\limits_{x}^{x+h}\{f(t)-f(x)\}\,dt$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Böylece

$$\left|\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}-f(x)\right|\leq\frac{1}{h}\int\limits_{x}^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt$$

olur. Bu da teoremi sağlar. ■

Teoremin karşıtı genelde doğru değildir.

Teorem 4.10 f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebilir ise $[a,b]$ aralığının hemen hemen her noktası f fonksiyonunun bir Lebesgue noktasıdır.

İspat. r bir rasyonel sayı olsun. $|f(t)-r|$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebilirdir ve böylece hemen hemen her $x\in[a,b]$ için

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{x}^{x+h}|f(t)-r|\,dt=|f(x)-r| \tag{4.8}$$

olur. $E(r)$, (4.8) eşitliğinin gerçeklenmediği $[a,b]$ aralığındaki noktaların oluşturduğu küme olsun. Buradan $mE(r)=0$ olduğu açıktır.

Şimdi bütün rasyonel sayıları bir dizi şeklinde r_1, r_2, r_3, ... diye numaralandıralım ve

$$E=\sum_{n=1}^{\infty}E(r_n)+E(|f|=\infty)$$

alalım. Buradaki $|f|$ fonksiyonu ölçülebilirdir. Yani

$$E(|f|>\alpha)=\begin{cases}E & , \quad \alpha<0\\ E(f>\alpha)+E(f<-\alpha) & , \quad \alpha\geq 0\end{cases}$$

şeklindedir.

O halde $mE = 0$ olur. Burada $[a-b]-E$ kümesinin tüm noktalarının $f(t)$ fonksiyonunun Lebesgue noktası olduğunu göstermek yeterlidir. $x_0 \in [a,b]-E$ ve ε keyfi pozitif bir sayı olsun. r_n,

$$|f(x_0) - r_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde bir rasyonel sayı olsun. O halde

$$||f(t) - r_n| - |f(t) - f(x_0)|| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ve

$$\left| \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - r_n| \, dt - \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| \, dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

olur. $x_0 \notin E$ olduğundan ve $|h| < \delta(\varepsilon)$ için

$$\left| \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - r_n| \, dt - |f(x_0) - r_n| \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

yani

$$\frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - r_n| \, dt < \frac{2}{3}\varepsilon$$

olur ve dolayısıyla $h < \delta(\varepsilon)$ için

$$\frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| \, dt < \varepsilon$$

gerçeklenir. ■

Teorem 4.11 İntegrallenebilir bir $f(t)$ fonksiyonunun her süreklilik noktası $f(t)$ fonksiyonunun bir Lebesgue noktasıdır.

İspat. $f(t)$ fonksiyonu x noktasında sürekli olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı; $|t - x| < \delta$ iken

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

sağlanacak şekilde vardır. $|h| < \delta$ için

$$\frac{1}{h} \int\limits_{x}^{x+h} |f(t) - f(x)| \, dt < \varepsilon$$

gerçeklenir ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.6 ve Teorem 4.8 bir $\Phi(x)$ fonksiyonunun integrallenebilir bir fonksiyonun belirsiz integrali olması için gerek ve yeter şartın mutlak sürekli olması gerektiğini ifade eder.

Aşağıdaki teoremde belirsiz bir intgralin toplam salınımının hesaplanabileceği ifade edilmektedir.

Teorem 4.12 $f(t)$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

ise

$$V_{[a,b]}[F] = \int_a^b |f(t)|\, dt$$

gerçeklenir. Yani mutlak sürekli bir fonksiyonun toplam salınımı türevinin mutlak değerinin belirsiz integralidir.

İspat. $x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ noktaları $[a,b]$ aralığının herhangi bir parçalanması ise

$$\sum_{k=0}^{n-1} |F(x_{k+1}) - F(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t)|\, dt = \int_a^b |f(t)|\, dt$$

yazılabilir. Buna göre

$$V_{[a,b]}[F] \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$$

olur. Ters eşitsizliği kurmak için $(a,b) = E$ alınır ve

$$P = E(f \geq 0), \qquad N = E(f < 0)$$

yazılır ise

$$\int_a^b |f(t)|\, dt = \int_P f(t)dt - \int_N f(t)dt$$

olur. ε keyfi bir pozitif sayı olsun. Belirsiz integral mutlak sürekli olduğundan bir $\delta > 0$ sayısı; ölçüsü $me < \delta$ olan her ölçülebilir $e \subset [a,b]$ kümesi için

$$\int_e |f(t)|\, dt < \varepsilon$$

gerçeklenir.

$F(P)$ ve $F(N)$ sırasıyla P ve N tarafından içerilen ve aşağıdaki koşulu sağlayan kapalı kümeler olsun:

$$m\left[P - F(P)\right] < \delta, \quad m\left[N - F(N)\right] < \delta$$

ise

$$\int_a^b |f(t)|\, dt < \int_{F(P)} f(t)dt - \int_{F(N)} f(t)dt + 2\varepsilon.$$

$\Gamma(P)$ ve $\Gamma(N)$, (a,b) aralığında içerilen kümeler olmak üzere, ayrık kapalı kümeler için Ayırma teoremi uyarınca,

$$\Gamma(P) \supset F(P), \quad \Gamma(N) \supset F(N), \quad \Gamma(P) \cdot \Gamma(N) = 0$$

olacak şekilde $\Gamma(P)$ ve $\Gamma(N)$ açık kümeleri bulunabilir. Ayrıca, sırasıyla $\Gamma(P)$ ve $\Gamma(N)$ kümelerini içeren $A(P)$ ve $A(N)$ sınırlı açık kümeleri vardır öyle ki $m\left[A(P) - F(P)\right] < \delta$, $m\left[A(N) - F(N)\right] < \delta$ olur. Şimdi,

$$G(P) = A(P) \cdot \Gamma(P), \quad G(N) = A(N) \cdot \Gamma(N)$$

oluşturalım. $G(P)$ ve $G(N)$, (a,b) aralığı tarafından içerilen ayrık açık kümelerdir, sırasıyla $F(P)$ ve $F(N)$ kümelerini içerirler ve $m\left[G(P) - F(P)\right] < \delta$, $m\left[G(N) - F(N)\right] < \delta$ sağlanır. Dolayısıyla

$$\int_a^b |f(t)|\, dt < \int_{G(P)} f(t)dt - \int_{G(N)} f(t)dt + 4\varepsilon$$

olur. $G(P)$ kümesi bileşen aralıkların toplamıdır. Bu aralıklardan yeteri kadar büyük sonlu sayıda alınarak ölçüsü $G(P)$ kümesinin ölçüsünden farkı δ sayısından küçük bir $B(P)$ kümesi elde edilebilir. O halde

$$\int_{G(P)} f(t)dt - \int_{B(P)} f(t)dt < \varepsilon$$

olur. $B(P) = \sum\limits_{k=1}^{n} (\lambda_k, \mu_k)$ olsun. Buradan

$$\int_{B(P)} f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{\lambda_k}^{\mu_k} f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \left[F(\mu_k) - F(\lambda_k)\right]$$

olur.

Dolayısıyla

$$\int_{G(P)} f(t)dt < \sum_{k=1}^{n} [F(\mu_k) - F(\lambda_k)] + \varepsilon$$

yazılabilir. Benzer bir şekilde $G(N)$ kümesinin sonlu sayıda (σ_1, τ_1), (σ_2, τ_2), ..., (σ_m, τ_m) parça aralıkları bulunabilir öyle ki

$$\int_{G(N)} f(t)dt > \sum_{i=1}^{m} [F(\tau_i) - F(\sigma_i)] - \varepsilon$$

olur. Bütün bu durumlar birleştirilirse

$$\int_a^b |f(t)|\, dt < \sum_{k=1}^{n} [F(\mu_k) - F(\lambda_k)] - \sum_{i=1}^{m} [F(\tau_i) - F(\sigma_i)] + 6\varepsilon$$

olur ve buradan

$$\int_a^b |f(t)|\, dt < \sum_{k=1}^{n} |F(\mu_k) - F(\lambda_k)| + \sum_{i=1}^{m} |F(\tau_i) - F(\sigma_i)| + 6\varepsilon$$

elde edilir. (λ_k, μ_k) ve (σ_i, τ_i) aralıklari ikişerli ayrık olduğu için

$$\sum_{k=1}^{n} |F(\mu_k) - F(\lambda_k)| + \sum_{i=1}^{m} |F(\tau_i) - F(\sigma_i)| \leq V_{[a,b]}\, [F]$$

sağlanır. O halde

$$\int_a^b |f(t)|\, dt < V_{[a,b]}\, [F] + 6\varepsilon$$

olur. ε keyfi olduğu için teorem sağlanır. ■

Bir sonraki kısımda

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

Stieltjes integralinin g sürekli olması durumunda hesaplanabileceği düşünülecektir. g mutlak sürekli olması durumunda ise bir Lebesgue integraline indirgenerek hesaplanabilir.

Teorem 4.13 f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli, g fonksiyonu da bu aralıkta mutlak sürekli ise

$$(S) \int_a^b f(x)dg(x) = (L) \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

gerçeklenir.

İspat. Her iki integralin de varlığı açıktır. Bu integrallerin eşit olduğunu göstermek için

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\left[g(x_{k+1}) - g(x_k)\right]$$

toplamı ve

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

integrali arasındaki farkı hesaplayalım.

$$g(x_{k+1}) - g(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} g'(x)dx$$

olduğu için

$$\sigma - \int_a^b f(x)g'(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\left[f(\xi_k) - f(x)\right]g'(x)dx \tag{4.9}$$

gerçeklenir.

f fonksiyonunun $[x_k, x_{k+1}]$ aralığındaki salınımı ω_k olarak yazılırsa $\alpha = \max\{\omega_k\}$ olmak üzere (4.9) ifadesinden

$$\left|\sigma - \int_a^b f(x)g'(x)dx\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} |g'(x)|\,dx \leq \alpha\int_a^b |g'(x)|\,dx$$

gerçeklenir. $[x_k, x_{k+1}]$ aralıklarının boyları 0 a giderse $\alpha \to 0$ olur. Böylece σ toplamı $\int_a^b f(x)g'(x)dx$ integraline yaklaşır. $\lim \sigma = \int_a^b f(x)dg(x)$ olduğu için teorem ispatlanır. ■

4.3 İlkel Fonksiyonların Yeniden İnşası

Türevi her yerde var ve sınırlı olacak şekildeki sürekli bir f fonksiyonunun türevinden elde edilmesi probleminin çözümü bilinen bir durumdur. Şimdi burada

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt \tag{4.10}$$

eşitliği, f' her yerde var fakat sınırlı olması gerekmediği durumda gerçeklenir mi sorusu ile ilgilenilecektir. Eğer f mutlak sürekli ise bu, açıktır.

Bu durumda, f' türevinin hemen hemen her yerde var olduğunu kabul etmek yeterlidir, f' türevinin hemen hemen her yerde var olması, f artan sürekli bir fonksiyon ve f' türevi hemen hemen her yerde 0 a eşit olduğunda bile (4.10) eşitliğinin gerçeklenmesi için genelde yeterli değildir. Burada (4.10) eşitliğinin gerçeklenmesi için koşullar, f in kendisi ile değil, f' ile ifade edilecektir (Natanson 1964).

Teorem 4.14 Eğer f' türevi her yerde var, sonlu ve integrallenebilir ise (4.10) gerçeklenir.

İspat iki lemmaya dayandırılarak verilecektir.

Lemma 4.1 $\Phi(x)$, $[a, b]$ aralığında tanımlı ve sonlu bir fonksiyon olsun. Eger $[a, b]$ aralığının her noktasında $\Phi(x)$ fonksiyonunun tüm türevlenmiş sayıları negatif olmayan ise $\Phi(x)$ artan bir fonksiyondur.

Lemma 4.2 φ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı ve sonlu olsun. Kabul edelim ki φ fonksiyonunun tüm türevlenmiş sayıları $[a, b]$ aralığının hemen hemen her noktasında negatif olmayan ve φ fonksiyonunun hiçbir türevlenmiş sayısı $[a, b]$ aralığının herhangi bir noktasında $-\infty$ a eşit değilse φ artan bir fonksiyondur.

İspat.

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} f'(x), & f'(x) \leq n \\ n, & f'(x) > n \end{cases}$$

olacak şekilde bir $\varphi_n(x)$ tanımlanırsa

$$|\varphi_n(x)| \leq |f'(x)| \tag{4.11}$$

olduğunu görmek kolaydır ve $\varphi_n(x)$ integrallenebilirdir. O halde

$$R_n(x) = f(x) - \int_a^x \varphi_n(t)dt$$

yazılabilir.

Buradan $R_n(x)$ fonksiyonunun artan olduğunu göstermek için ilk olarak hemen hemen her yerde

$$R_n'(x) = f'(x) - \varphi_n(x) \geq 0.$$

olduğu gösterilmelidir. Böylece $R_n(x)$ fonksiyonunun negatif olduğu bazı türevlenmiş sayılarının kümesi sıfır ölçüye sahiptir. Diğer yandan $\varphi_n(x) \leq n$ ve

$$\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} \varphi_n(t)dt \leq n$$

olur. Buradan

$$\frac{R_n(x+h) - R_n(x)}{h} \geq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - n$$

yazılabilir. Bu da, $R_n(x)$ fonksiyonunun hiçbir türevlenmiş sayısının $-\infty$ olmadığını gösterir. Dolayısıyla Lemma 4.2 den $R_n(x)$ artandır. Bu,

$$R_n(b) \geq R_n(a)$$

olmasını gerektirir veya diğer açıdan

$$f(b) - f(a) \geq \int_a^b \varphi_n(x)dx$$

olur.

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f'(x)$$

olduğu için (4.11) den

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \int_a^b f'(x)dx$$

olur. Sonuç olarak

$$f(b) - f(a) \geq \int_a^b f'(x)dx$$

sağlanır. Aynı şekilde, bu işlemler $-f$ fonksiyonuna uygulanırsa

$$f(b) - f(a) \leq \int_a^b f'(x)dx$$

olur. Böylece

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)dx$$

olur.

Burada b yerine herhangi $x \in (a,b]$ alınırsa ispat tamamlanır. ■

Sonuç olarak iki örnekten bahsedelim.

Örnek 4.1 f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında tanımlı

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x} \quad , & 0 < x \leq 1 \\ \quad 0 \quad , & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde fonksiyon olsun. Bu fonksiyon her yerde sonlu türeve sahiptir.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{x} - x^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{x} \qquad (x > 0) \\ f'(0) &= 0 \end{aligned}$$

şeklindedir.

$$|f'(x)| = \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

olduğu için bu türev integrallenebilirdir. Dolayısıyla f fonksiyonu Teorem10.1 in tüm koşullarını sağlar. Ayrıca f' fonksiyonunun sınırlı olmadığını görmek kolaydır.

Örnek 4.2 f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında tanımlı

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{\pi}{x^2} \quad , & 0 < x \leq 1 \\ \quad 0 \quad , & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde fonksiyon olsun. Bu fonksiyon her yerde sonlu bir türeve sahiptir fakat türevi integrallenemez.

$$f'(x) = 2x \cos \frac{\pi}{x^2} - \frac{2\pi}{x} \sin \frac{\pi}{x^2} \qquad (x > 0)$$

olur. Özel olarak eğer $0 < \alpha < \beta \leq 1$ ve $f'(x)$ türevi $[\alpha, \beta]$ aralığında sınırlı ise

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)dx = \beta^2 \cos \frac{\pi}{\beta^2} - \alpha^2 \cos \frac{\pi}{\alpha^2}$$

yazılabilir.

Yine özel olarak

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{2}{4n+1}}, \qquad \beta_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

için

$$\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f'(x)dx = \frac{1}{2n}$$

olur. Burada $[\alpha_n, \beta_n]$ $(n = 1, 2, ...)$ aralıkları ikişerli ayrıktır. $E = \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n]$ yazılırsa $\int_E |f'(x)|\, dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = +\infty$ olur ve $f'(x)$ integrallenemez. Dolayısıyla türevinden elde edilebilen bir fonksiyonun yeniden inşası problemi için Lebesgue integrali tam bir çözüm vermez. Problemin tam bir çözümü Lebesgue integralinin genelleşmiş hali olan Perron-Denjoy integrasyon ile verilir. Fakat burada bu genelleştirilmiş integral tartışılmayacaktır.

4.4 Salınımda Yakınsama

Yaklaşım teorisi ile ilgili önemli konulardan biri salınım yarı normunda yakınsamadır. Bu doğrultuda ilk çalışma, Lorentz tarafından Bernstein polinomları için yapılmıştır (Lorentz 1953).

$[0, 1]$ üzerinde tanımlı, reel değerli sınırlı salınımlı fonksiyonların $TV[0, 1]$ uzayında tanımlı olan L_n lineer pozitif operatörleri için, eğer

$$\lim_{n\to\infty} V_{[0,1]} [L_n f - f] = 0$$

ise $(L_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi f fonksiyonuna salınımda yakınsar denir.

Bu bölümde, Bernstein polinomlarının salınım azaltma özelliği, yani; $f \in TV[0, 1]$ için

$$V_{[0,1]} [B_n f] \leq V_{[0,1]} [f], \qquad n \in \mathbb{N}$$

eşitsizliğini sağladığı gösterilecektir (Lorentz 1953). Ayrıca, $(B_n f)$ Bernstein polinomları dizisinin $f \in AC[0, 1]$ fonksiyonuna salınımda yakınsaması, yani;

$$\lim_{n\to\infty} V_{[0,1]} [B_n f - f] = 0$$

gerçeklendiği incelenecektir (Lorentz 1953).

$f \in TV[0,1]$ için $\|f\|_{TV} = V_{[0,1]}[f]$ olduğu göz önünde bulundurularak, aşağıdaki sonuç verilebilir:

Teorem 4.15 $f \in TV[0,1]$ ise $\|B_n f\|_{TV} \leq \|f\|_{TV}$ gerçeklenir.

İspat. Bernstein polinomlarının türevi

$$\begin{aligned}
&(B_n f)'(x) \\
= &\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1} (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k (n-k)(1-x)^{n-k-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \\
= &\; n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \\
= &\; n \sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] P_{k,n-1}(x) \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\|B_n f\|_{TV[0,1]} &= V_{[0,1]}[B_n f] = \int_0^1 |(B_n f)'(x)|\, dx \\
&= \int_0^1 \left| n \sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] P_{k,n-1}(x) \right| dx \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| n \binom{n-1}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k-1} dx \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| n \binom{n-1}{k} B(k+1, n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| n \binom{n-1}{k} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k)}{\Gamma(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq V_{[0,1]}[f] = \|f\|_{TV[0,1]}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Bernstein polinomları, süreksiz fonksiyonlara yaklaşımda uygun olmamaktadır. Kantorovitch $[0,1]$ üzerinde integrallenebilen bir f fonksiyonu için, Bernstein polinomlarının bir genellemesini aşağıdaki şekilde vermiştir (Lorentz 1953).

f, $[0,1]$ üzerinde integrallenebilir olduğundan, f fonksiyonunun

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt+F(0)$$

belirsiz integralini alalım.

(4.12) ifadesindeki gibi, $(B_{n+1}F)(x)$, $n\in\mathbb{N}$, polinomunun türevi alınarak

$$\begin{aligned}(B_{n+1}F)'(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}(n+1)\left[F\left(\frac{k+1}{n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)\right] \qquad (4.13)\\ &= (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)dt\\ &= :(K_nf)(x),\end{aligned}$$

Kantorovitch polinomları elde edilir.

Kantorovitch polinom dizisinin düzgün yakınsaklığı aşağıdaki teoremde incelenmiştir:

Teorem 4.16 $f\in C[0,1]$ ise $\lim\limits_{n\to\infty}\|K_nf-f\|_{C[0,1]}=0$ olur.

İspat. $e^i(x)=x^i$, $i=0,1,2$ olmak üzere, $n\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}(K_ne_0)(x) &= 1\\ (K_ne_1)(x) &= \frac{n}{n+1}e_1+\frac{1}{2(n+1)}\\ (K_ne_2)(x) &= \frac{n(n-1)}{(n+1)^2}e_2+\frac{2n}{(n+1)^2}e_1+\frac{1}{3(n+1)^2}\end{aligned}$$

olduğundan, ispat Teorem 2.2 de verilen Korovkin teoreminden elde edilir. ■

Şimdi, Kantorovitch polinom dizisinin $L^1(0,1)$ uzayında yakınsamasını verelim.

Teorem 4.17 $f\in L^1(0,1)$ ise

$$\lim_{n\to\infty}\|K_nf-f\|_{L^1(0,1)}=0$$

gerçeklenir.

İspat. Önce, $K_n : L^1(0,1) \to L^1(0,1)$, $(n \in \mathbb{N})$ operatörleri için, $\|K_n\|$ operatör normunu göstermek üzere; $\|K_n\| \leq M$ olacak şekilde bir $M \geq 0$ sayısının var olduğunu gösterelim: $f \in L^1(0,1)$ olmak üzere, her $n \geq 1$ ve $0 \leq k \leq n$ için

$$|(K_n f)(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (n+1) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} |f(t)|\, dt$$

sağlanır. Buradan, her $x \in [0,1]$ için

$$\int_0^1 |(K_n f)(x)|\, dx \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx \left[(n+1) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} |f(t)|\, dt \right]$$

olur.

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \qquad (x, y > 0)$$

beta fonksiyonu kullanılarak,

$$\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx = B(k+1, n-k+1) = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}}$$

olduğu görülebilir. Buradan

$$\int_0^1 |(K_n f)(x)|\, dx \leq \sum_{k=0}^{n} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} |f(t)|\, dt = \int_0^1 |f(t)|\, dt$$

bulunur. Böylece, her $f \in L^1(0,1)$ için $\|K_n f\|_1 \leq \|f\|_1$, yani; $\|K_n\| \leq 1$ olur. Şimdi de teoremin iddiasını elde edelim. $C[0,1]$ uzayı, $L^1(0,1)$ uzayında yoğun olduğundan ve Teorem 4.16 dan, verilen bir $\varepsilon > 0$ için, $\|f - g\|_{L^1(0,1)} < \varepsilon$ ve her $n \geq n_0$ için

$$\|K_n g - g\|_{C(0,1)} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $g \in C[0,1]$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece,

$$\begin{aligned}
\|K_n f - f\|_{L^1(0,1)} &= \|K_n f \pm K_n g \pm g - f\|_{L^1(0,1)} \\
&\leq \|K_n g - g\|_{L^1(0,1)} + \|K_n(f-g) - (f-g)\|_{L^1(0,1)} \\
&\leq \|K_n g - g\|_{L^1(0,1)} + \|K_n(f-g)\|_{L^1(0,1)} + \|f-g\|_{L^1(0,1)} \\
&\leq \|K_n g - g\|_{L^1(0,1)} + M\|f-g\|_{L^1(0,1)} + \|f-g\|_{L^1(0,1)} \\
&= \int_0^1 |(K_n g)(x) - g(x)| + (M+1)\|f-g\|_{L^1(0,1)} \\
&< \varepsilon_1 + (M+1)\varepsilon \\
&= (2+M)\min(\varepsilon_1, \varepsilon) \\
&= (2+M)\varepsilon'
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.18 Salınım yarınormunda, $AC[a,b]$ uzayı $TV[a,b]$ uzayının kapalı bir alt uzayıdır (Bardaro vd. 2003).

İspat. Teorem 4.4 den AC, TV nin bir alt kümesidir.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $AC[a,b]$ uzayında f fonksiyonuna salınım yarı normunda yakınsayan fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu durumda, verilen $\varepsilon > 0$ için

$$V_{[a,b]}[f_n - f] = \|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. $f_n \in AC[a,b]$ iken, bir $\delta > 0$ vardır öyle ki ayrık açık aralıkların her sonlu $\{[a_i, b_i] : \ i = 1, 2, ..., k\}$ kümesi için

$$\sum_{i=1}^{k} (b_i - a_i) < \delta$$

iken

$$\sum_{i=1}^{k} |f_n(b_i) - f_n(a_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} |f(b_i) - f(a_i)| &\leq \sum_{i=1}^{k} |(f-f_n)(b_i) - (f-f_n)(a_i)| + \sum_{i=1}^{k} |f_n(b_i) - f_n(a_i)| \\
&\leq V_{[a,b]}[f - f_n] + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $f \in AC[a,b]$ ve böylece $AC[a,b]$ kapalıdır. ■

Teorem 4.18 e göre Bernstein polinomları dizisi için, aşağıdaki salınımda yakınsama sonucunu verelim.

Teorem 4.19 $f \in TV[0,1]$ olsun. $(B_n f)$ dizisinin f fonksiyonuna salınımda yakınsaması için gerek ve yeter koşul $f \in AC[0,1]$ olmasıdır.

İspat. $f \in AC[0,1]$ olduğundan (4.13) den $f' \in L^1[0,1]$ olur ve $f(x) = \int\limits_0^x f'(t)dt - f(0)$ dır. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $B_n f \in AC[0,1]$ olur. Böylece, Teorem 4.12 ve Sonuç 4.1 den

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} V_{[0,1]}[B_n f - f] &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 |(B_n f)'(x) - f'(x)|\, dx \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^1 |(K_{n-1} f')(x) - f'(x)|\, dx \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \|K_{n-1} f' - f'\|_{L^1(0,1)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

gerçeklenir.

Karşıt olarak $\lim\limits_{n\to\infty} V_{[0,1]}[B_n f - f] = 0$ iken $\lim\limits_{n\to\infty} \|B_n f - f\|_{TV[0,1]} = 0$ olur. Bu da $TV[0,1]$ uzayında $B_n f \to f$ demektir. Buradan $AC[0,1]$ kapalı olduğu için f fonksiyonu $AC[0,1]$ uzayına aittir.

$$f \in AC[0,1] \text{ ise } V_{[0,1]}[f] = \int_0^1 |f'(x)|\, dx$$

olur. ■

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

En önemli lineer pozitif yaklaşım operatörleri sürekli fonksiyonlar uzayında verildiği için, bu uzayın ve dual uzayının anlaşılması ve dolayısıyla, özellikle lineer pozitif fonksiyonellerin genel gösterimlerinin bilinmesi önemlidir. Bu tezde, $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayının dualinin, $[a, b]$ aralığında sınırlı salınımlı fonksiyonlar uzayı olduğunu gösteren Riesz Gösterim Teoremi'nin Bernstein polinomları kullanılarak elde edilen ispatı verilmiştir ve Bernstein polinomlarının Stieltjes integral formundaki ifadesi elde edilmiştir. Bu doğrultuda, konuya hazırlık niteliğindeki temel kavramlar ve teoremler, bu tür yaklaşım operatörlerinin bazı soyut genelleştirilmelerinin çalışmasında basamak oluşturacak niteliktedir.

KAYNAKLAR

Bardaro, C., Butzer, P.L., Stens, R.L. and Vinti, G., 2003. Convergence in variation and rates of approximation for Bernstein-type polynomials and singular convolution integrals, *Analysis* 23, 299–340.

Bernstein, S., 1912-1913. Demenstration du theoreme de Weierstrass, fondee sur le calculdes probabilities, Commun. Soc. Math. Kharkow (2), 13, 1-2.

Butzer, P. L., Nessel and R. J., 1971. *Fourier Analysis and Approximation.* Academic Press, New York and London.

Folland, G. B., 1999. *Real Analysis.* John Wiley and Sons, INC. Toronto.

Kreyszig, E., 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications.* NewYork, Wiley.

Lorentz, G. G., 1953. *Bernstein Polynomials.* University of Toronto Press, Toronto.

Nair, M. T., 2013. *The Space* $BV\,[a,b]$. Department of Mathematics, IIT Madras.

Natanson, I. P., 1964. *Theory of Functions of a Real Variable.* Translated from the Russian by Leo F. Boron, Frederick Ungar Pub. Co. New York.

Paltanea, R., 2004. *Approximation Theory Using Positive Linear Operators.* Birkhäuser Basel.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Gamze ANDAÇ

Doğum Yeri : Yozgat/Şefaatli

Doğum Tarihi : 01/01/1991

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Dikmen Lisesi (2005-2009)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2009-2013)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2014-2015)