

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CHLODOWSKY-TAYLOR POLİNOMLARIYLA YAKLAŞIM

Seyide ATAK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2012**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

CHLODOWSKY-TAYLOR POLİNOMLARIYLA YAKLAŞIM

Seyide ATAK

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ertan İBİKLİ

Bu tezde Chlodowsky ve Taylor operatörlerinin konvolüsyonu olan Chlodowsky-Taylor operatörünün yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızı incelenmiştir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, bu tez için gerekli olan temel tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca ağırlıklı uzaylardaki sürekli modülü ve lineer pozitif operatörler tanıtılp temel özelliklerini incelenmiştir. Korovkin teoremi ve Baskakov teoremi ispatlarıyla birlikte verilmiştir. Son olarak sınırsız bölgelerde klasik Korovkin teoremlerinin kullanılamayacağı gösterilmiş ve bu durumda yakınsaklık teoreminin nasıl olması gerektiği araştırılmıştır. Bu teoremi verebilmek için A.Hacıyev tarafından ispatlanan bazı önermeler ve ispatları verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Bernstein-Chlodowsky polinomlarının yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızı incelenmiştir.

Son bölümde ise, bazı konvolüsyon tipli operatörlerin yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızları incelenmiştir.

Ocak 2012, 88 sayfa

Anahtar Kelimeler : Chlodowsky-Taylor polinomları, Korovkin teoremi, lineer pozitif operatörler, yakınsaklık hızı, sürekli modülü, ağırlıklı uzay.

ABSTRACT

Master Thesis

CONVERGENCE BY CHLODOWSKY-TAYLOR POLYNOMIALS

Seyide ATAK

Ankara University

Graduate School of Natural And Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ertan İBİKLİ

In this thesis, the approximation properties and the speed of approximation of Chlodowsky-Taylor operator which is the convolution of Taylor and Chlodowsky operators are examined.

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is devoted to introduction.

In the second chapter, the fundamental definitions and theorems have been given, which are necessary for this thesis. Furthermore, modulus of continuity in weighted spaces and linear positive operators are introduced. Also their some basic properties are obtained. Korovkin theorem and Baskakov theorem are given with their proofs and it is shown that the classical Korovkin theorems can not be used in unbounded regions and how convergence theorem should be in this case is investigated. Some propositions and proofs of A. Hacıyev are given in order to give this theorem.

In the third chapter, the approximation properties and the speed of approximation of Bernstein-Chlodowsky polynomials are examined.

In the last chapter, the approximation properties and the speed of approximation of some convolution type operators are examined.

January 2012, 88 pages

Key Words: Chlodowsky-Taylor polynomials, Korovkin theorem, linear positive operators, speed of approximation, modulus of continuity, weighted spaces.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren ve araştırmalarımın her aşamasında en yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Ertan İBİKLİ (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)' ye ve bana her zaman destek olan aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Seyide ATAK

Ankara, 2012.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. TANIM VE ÖNBİLGİ	5
2.1 Bazı Fonksiyon Uzayları	5
2.2 Süreklilik Modülü	7
2.3 Ağırlıklı Uzaylarda Süreklilik Modülü	11
2.4 Sonlu Aralıkta Sürekli Fonksiyonlara Polinomlar ile Yaklaşım	18
2.5 Lineer Pozitif Operatörler ve Yaklaşım Özellikleri	24
3. BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARI	49
4. BAZI KONVOLÜSYON TİPLİ OPERATÖRLER İLE YAKLAŞIM	62
4.1 Bernstein-Taylor Polinomları ile Yaklaşım	62
4.2 Chlodowsky-Taylor Polinomları ile Yaklaşım	73
KAYNAKLAR	86
ÖZGEÇMİŞ	88

SİMGELER DİZİNİ

\mathbb{N}	doğal sayılar kümesi
\mathbb{R}	reel sayılar kümesi
$B(D)$	D kümesi üzerinde tanımlı ve sınırlı fonksiyonların uzayı
$C(D)$	D kümesi üzerinde tanımlı ve sürekli fonksiyonların uzayı
$C^{(r)}(D)$	D kümesi üzerinde tanımlı ve r. mertebeden türevi sürekli fonksiyonların uzayı
$B_\rho(D)$	$B(D)$ uzayının ağırlıklı fonksiyon uzayı
$C_\rho(D)$	$C(D)$ uzayının ağırlıklı fonksiyon uzayı
$C_\rho^k(D)$	$C_\rho(D)$ uzayının bir alt uzayı
$\ \cdot\ _{C(D)}$	$C(D)$ uzayında tanımlı norm
$\ \cdot\ _\rho$	ağırlıklı uzayda tanımlı norm
$f_n \rightrightarrows f$	f_n dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsar
c_n^k	n' nin k' li kombinasyonu, yani $c_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
$\omega(\delta) = \omega(f; \delta)$	reel değerli sınırlı f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\Omega_f(\delta) = \Omega(f; \delta)$	reel değerli sınırlı f fonksiyonunun ağırlıklı uzaylardaki süreklilik modülü
$L(f; x)$	L operatörünün f fonksiyonuna uygulanması

1.GİRİŞ

Yaklaşım teorisi, verilen bir uzaydaki bir fonksiyona iyi özelliklerini olan aynı uzaya ait fonksiyonlar ailesi ile yaklaşım yapıp yapılamayacağını araştırır.

Yaklaşım teorisinin temel teoremi olarak nitelendirilen teorem, kapalı ve sınırlı $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli bir f fonksiyonu için her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in [a, b]$ olmak üzere

$$|P_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $P_n(x)$ polinomunun varlığı, ilk kez 1885 yılında Weierstrass tarafından ifade ve ispat edilmiştir.

Fakat bu polinomun katsayılarının ne olacağı belirtilmemiştir.

Bernstein (1912) tarafından $[0, 1]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli bir f fonksiyonuna yaklaşan polinomların tipi hakkında bir teorem ispatlanmıştır.

$$P_n(x) = B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) c_n^k x^k (1-x)^{n-k}; \quad 0 \leq x \leq 1$$

tipinde polinomlar dizisi tanımlamış ve bu polinomlar dizisi için keyfi $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $x \in [0, 1]$ ve her $n \geq n_0$ için

$$|B_n(f; x) - f(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermiştir.

Bu polinomlar keyfi sınırlı aralık için de tanımlanabilir.

İlk defa Chlodowsky (1937) tarafından $[0, \infty)$ aralığı üzerinde Bernstein polinomları genelleştirilmiş ve bu polinomların yaklaşım özellikleri araştırılmıştır.

Bernstein-Chlodowsky polinomlar dizisi olarak adlandırılan bu polinomlar dizisi (b_n)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

şartlarını sağlayan, monoton artan reel terimli pozitif sayı dizisi olmak üzere

$$C_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}b_n\right) c_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}; \quad 0 \leq x \leq b_n$$

şeklinde tanımlıdır.

H. Bohman (1951) tarafından toplam şeklindeki lineer pozitif operatörler dizisinin $[0, 1]$ aralığında sürekli $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşması problemi incelenmiştir.

H. Bohman göstermiştir ki $x \in [0, 1]$, $0 \leq \alpha_{k,n} \leq 1$ olduğunda

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(\alpha_{k,n}) P_{n,k}(x), \quad P_{n,k}(x) \geq 0$$

pozitif operatörler dizisinin $n \rightarrow \infty$ iken $[0, 1]$ aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter koşulları üç tanedir. Bunlar;

$$L_n(1; x) \Rightarrow 1$$

$$L_n(t; x) \Rightarrow x$$

$$L_n(t^2; x) \Rightarrow x^2$$

şeklinde ifade edilir.

Aşikardır ki Bohman'ın araştırdığı operatörlerin değeri f fonksiyonunun $[0, 1]$ aralığının dışındaki değerlerinden bağımsızdır.

P. P. Korovkin (1953) genel bir teorem ispatlamıştır ve göstermiştir ki Bohman'ın koşulları genel halde de gerçekleşir. Korovkin Teoremi olarak adlandırılan bu teorem aşağıda ifade edilmiştir:

(L_n) lineer pozitif operatörler dizisi $[a, b]$ aralığında $n \rightarrow \infty$ iken

$$L_n(1; x) \Rightarrow 1$$

$$L_n(t; x) \Rightarrow x$$

$$L_n(t^2; x) \Rightarrow x^2$$

koşullarını gerçekliyorsa $[a, b]$ aralığında sürekli ve tüm reel eksende sınırlı herhangi bir f fonksiyonu için

$$L_n(f; x) \Rightarrow f(x); \quad a \leq x \leq b$$

olur.

Baskakov (1962) $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli ve M_f , f fonksiyonuna bağlı bir sabit olmak üzere

$$|f(x)| \leq M_f (1 + x^2)$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonu için Korovkin teoreminin gerçeklendiğini ispatlamıştır.

G. H. Kirov (1992) tarafından Bernstein-Taylor polinomları, $r = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere $f \in C^r [0, 1]$ ve $x \in [0, 1]$ için

$$B_{n,r}(f; x) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}\right)^i c_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklinde tanımlanmış ve bu polinomların yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

A.İzgi, İ.Büyükyazıcı, E.İbikli (2009) tarafından Chlodowsky-Taylor polinomları, $f \in C^r [0, \infty)$, ($r = 0, 1, 2, \dots$) ve $x \in [0, b_n]$ için

$$C_{n,r}(f; x) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}b_n\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^i c_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

şeklinde tanımlanmış ve bu polinomların yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Burada (b_n) ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

şartlarını sağlayan monoton artan reel terimli pozitif sayı dizisidir.

Chlodowsky polinomlarının bir fonksiyona yaklaşımı için aranan temel koşul o fonksiyonun sürekli olmasıdır. Diğer yandan f fonksiyonu r -kez türevlenebilir ve r -inci türevi sürekli ise bu durumda türev özelliklerinin de kullanılabileceği Taylor polinomları göz önüne alınabilir. Eğer bir f fonksiyonu r -kez türevlenebilir ve r -inci türevi sürekli ise f fonksiyonuna Chlodowsky-Taylor polinomlar dizisi ile yaklaşılabilir. Görülecektir ki bu yaklaşım Chlodowsky polinomlar dizisinden daha hızlıdır.

Bu tezde iki operatörün konvolüsyonu olan Chlodowsky-Taylor polinomlar dizisinin f fonksiyonuna yaklaşımı ve yaklaşım hızı incelenecektir. Bu bize farklı operatörlerin birleştirilmesiyle daha hızlı bir yaklaşımın elde edilebileceğini göstermektedir.

2. TANIM VE ÖNBİLGİ

Bu bölümde çalışma için gerekli bazı tanım ve teoremler verilecektir.

2.1 Bazı Fonksiyon Uzayları

Bu kesimde bazı fonksiyon sınıflarının tanımlarını verelim.

$[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sınırlı fonksiyonlar uzayı

$$B[a, b] = \{f | f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tanımlı ve } \forall x \in [a, b] \text{ için } |f(x)| < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır.

$[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli fonksiyonlar uzayı

$$C[a, b] = \{f | f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tanımlı ve } \forall x \in [a, b] \text{ için sürekli }\}$$

ile gösterilir ve $C[a, b]$ üzerindeki norm

$$\|f\|_{C[a, b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır.

$$B_\rho(\mathbb{R}) = \{f : \forall x \in \mathbb{R} \text{ için } |f(x)| \leq M_f \rho(x)\}$$

$$C_\rho(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R} \text{ için } |f(x)| \leq M_f \rho(x)\}$$

ile sırasıyla $B(\mathbb{R})$ ve $C(\mathbb{R})$ uzaylarının ağırlıklı fonksiyon uzayları tanımlanabilir.

Burada M_f , f fonksiyonuna bağlı bir sabit ve $\rho(x) = 1 + \Phi^2(x)$ olup, $\Phi, (-\infty, \infty)$ aralığında sürekli, artan ve

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Phi(x) = \pm \infty$$

koşulunu sağlayan bir fonksiyondur. ρ fonksiyonuna ise *ağırlık fonksiyonu* denir.

$B_\rho(\mathbb{R})$ ve $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayları üzerinde norm

$$\|f\|_\rho = \sup_{-\infty < x < \infty} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}$$

şeklinde tanımlanır.

$C_\rho(\mathbb{R})$ uzayının bazı alt uzayları; k_f , f fonksiyonuna bağlı bir sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} C_\rho^k(\mathbb{R}) &= \left\{ f \in C_\rho(\mathbb{R}) : \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = k_f < \infty \right\} \\ C_\rho^0(\mathbb{R}) &= \left\{ f \in C_\rho(\mathbb{R}) : \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = 0 \right\} \end{aligned}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.1.1 (Cauchy-Schwartz Eşitsizliği)

$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği gerçekleşir (Natanson 1964).

Tanım 2.1.2 (Taylor Formülü) Bir f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı ve $(n+1)$ kez sürekli türevlenebilir olsun. Bu durumda Taylor formülü $x_0 \in [a, b]$ ve her $x \in [a, b]$ için

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

olmak üzere

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_{n+1}(x)$$

şeklinde tanımlıdır (Musayev vd. 2003).

Tanım 2.1.3 Taylor formülünde karşılaşılan ve en fazla n-inci dereceden olan

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

şeklindeki tam rasyonel fonksiyona x_0 noktasında f fonksiyonunun n-inci basamaktan *Taylor polinomu* adı verilir (Musayev 2003).

Tanım 2.1.4 (Modified Taylor Formülü) Modified Taylor formülü aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ &\quad + \frac{(x - x_0)^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} [f^{(n)}(x_0 + t(x-x_0)) - f^{(n)}(x_0)] dt \end{aligned}$$

2.2 Süreklik Modülü

Tanım 2.2.1 Boş olmayan $I \subset \mathbb{R}$ sınırlı aralığı verilmiş olsun.

$$d(I) = \sup \{|x - y| : x, y \in I\}$$

büyüklüğünə I kümesinin çapı denir.

Tanım 2.2.2 $I \subset \mathbb{R}$ sınırlı bir aralık, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde sınırlı olsun.

$d = d(I)$, I kümesinin çapı olmak üzere $\omega : (0, d] \rightarrow [0, \infty)$;

$$\omega_f(\delta) = \omega(f; \delta) = \sup \{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| \leq \delta\}$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun I üzerindeki sürekli modülü denir.

Süreklik modülünün bazı önemli özellikleri aşağıda verilmiştir. Bu özelliklerin ifade ve ispatında Korovkin (1960) ve Natanson (1964) kaynaklarından yararlanılmıştır.

Lemma 2.2.1 $\delta > 0$ için $\omega_f(\delta) \geq 0$ dir.

Tanım 2.2.2 den ispatı açıklar.

Lemma 2.2.2 $\omega_f(\delta)$ monoton artandır.

İspat: $\forall \delta_1, \delta_2 \in (0, d], \delta_1 < \delta_2$ için

$$\begin{aligned} & \{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| \leq \delta_1\} \\ & \subset \{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| \leq \delta_2\} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \omega_f(\delta_1) &= \sup \{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| \leq \delta_1\} \\ &\leq \sup \{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| \leq \delta_2\} \\ &= \omega_f(\delta_2) \end{aligned}$$

gerçeklenir.

Lemma 2.2.3 f, I aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x_1, x_2 \in I$ için

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \omega_f(|x_1 - x_2|)$$

gerçeklenir.

Tanım 2.2.2 den ispatı açıklar.

Lemma 2.2.4 $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\omega_f(n\delta) \leq n\omega_f(\delta)$$

gerçeklenir.

İspat: Süreklik modülünün tanımından $\omega_f(n\delta) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in I \\ |x_1 - x_2| \leq n\delta}} |f(x_1) - f(x_2)|$ olmak üzere $x_1 = x_2 + nh$ denirse

$$\begin{aligned}\omega_f(n\delta) &= \sup_{\substack{x_2 \in I \\ |h| \leq \delta}} |f(x_2 + nh) - f(x_2)| \\ &= \sup_{\substack{x_2 \in I \\ |h| \leq \delta}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_2 + (k+1)h) - f(x_2 + kh)] \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{\substack{x_2 \in I \\ |h| \leq \delta}} |f(x_2 + (k+1)h) - f(x_2 + kh)|\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Tanım 2.2.2' den toplama bağlı ifade $\omega_f(\delta)$ olur. Toplamin sayısı n tane olduğu için istenen eşitsizlik elde edilir.

Lemma 2.2.5 λ pozitif reel sayı olmak üzere

$$\omega_f(\lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega_f(\delta)$$

gerçeklenir.

İspat: $[\lambda]$ ile λ sayısının tam kısmını gösterelim. Bu durumda

$$[\lambda] \leq \lambda < [\lambda] + 1$$

eşitsizliği geçerlidir. $\omega(f; \delta)$ nin monoton artan olma özelliği ve Lemma 2.2.4 gereğince

$$\begin{aligned}\omega_f(\lambda\delta) &\leq \omega_f(([\lambda] + 1)\delta) \\ &\leq ([\lambda] + 1)\omega_f(\delta) \\ &\leq (\lambda + 1)\omega_f(\delta)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Lemma 2.2.6 f , I aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_f(\delta) = 0$$

gerçeklenir.

İspat: f sürekli olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $|x_1 - x_2| < \eta$ olduğunda

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &< \varepsilon \\ \sup |f(x_1) - f(x_2)| &< \varepsilon \end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlayan en az bir $\eta > 0$ sayısı var olup, $\omega_f(\eta)$ nin tanımından $\omega_f(\eta) < \varepsilon$ olur. Lemma 2.2.2' den $\delta < \eta$ için

$$\omega_f(\delta) < \varepsilon$$

yazılabilir. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 2.2.7 (δ_n) sıfıra yakınsayan bir dizi ve c_f , f fonksiyonuna bağlı sabit bir sayı olmak üzere

$$\omega_f(\delta_n) \geq c_f \delta_n$$

gerçeklenir.

İspat: Lemma 2.2.5' den yararlanılarak

$$\begin{aligned} \omega_f(1) &= \omega_f\left(\frac{1}{\delta_n} \delta_n\right) \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{\delta_n}\right) \omega_f(\delta_n) \\ &= \left(\frac{\delta_n + 1}{\delta_n}\right) \omega_f(\delta_n) \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir.

(δ_n) yakınsak dizi olduğundan $\delta_n + 1 \leq c$ olacak biçimde bir c sabiti vardır. Yani

$$\omega_f(1) \leq \frac{c}{\delta_n} \omega_f(\delta_n)$$

eşitsizliği elde edilir. $c_f = \frac{\omega_f(1)}{c}$ denirse

$$\omega_f(\delta_n) \geq c_f \delta_n$$

bulunur. Bu da istenen ifadeyi verir.

2.3 Ağırlıklı Uzaylardaki Süreklik Modülü

Sınırsız aralikta $\delta \rightarrow 0$ iken $\omega_f(\delta)$ sürekli modülü sıfır yakınsamadığından bu aralikta $\delta \rightarrow 0$ iken sıfır yakınsayan $\Omega_f(\delta)$ ağırlıklı sürekli modülü tanımlanmıştır (N. I. Ashieser 1947).

Tanım 2.3.1 ρ fonksiyonu ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$\Omega_f(\delta) = \sup \left\{ \frac{|f(x+h) - f(x)|}{\rho(h)\rho(x)} : x \in [0, \infty), |h| \leq \delta, f \in C_\rho^k(\mathbb{R}) \right\}$$

şeklinde tanımlı $\Omega_f(\delta)$ fonksiyonuna f fonksiyonunun $C_\rho^k(\mathbb{R})$ uzayında sürekli modülü denir.

Ağırlıklı uzaylardaki sürekli modülünün bazı önemli özellikleri aşağıda verilmiştir.

Lemma 2.3.1 $\delta > 0$ için $\Omega_f(\delta) \geq 0$ dır.

Tanımdan ispatı açıkrtır.

Lemma 2.3.2 $\Omega_f(\delta)$ monoton artandır.

İspat: $\forall \delta_1, \delta_2 \in [0, \infty)$ olmak üzere $\delta_1 < \delta_2$ için

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{|f(x+h) - f(x)|}{\rho(h)\rho(x)} : x \in [0, \infty), |h| \leq \delta_1 \right\} \\ & \subset \left\{ \frac{|f(x+h) - f(x)|}{\rho(h)\rho(x)} : x \in [0, \infty), |h| \leq \delta_2 \right\} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \Omega_f(\delta_1) &= \sup \left\{ \frac{|f(x+h) - f(x)|}{\rho(h)\rho(x)} : x \in [0, \infty), |h| \leq \delta_1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \frac{|f(x+h) - f(x)|}{\rho(h)\rho(x)} : x \in [0, \infty), |h| \leq \delta_2 \right\} \\ &= \Omega_f(\delta_2) \end{aligned}$$

gerçeklenir.

Lemma 2.3.3 Her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\Omega_f(m\delta) \leq 2m(1 + \delta^2)\Omega_f(\delta)$$

gerçeklenir.

İspat:

$$\Omega_f(\delta) = \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{(1+x^2)(1+h^2)}$$

ifadesinde $x+h=t$ denilirse

$$\Omega_f(\delta) = \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |t-x| \leq \delta}} \frac{|f(t) - f(x)|}{(1+x^2)(1+(t-x)^2)}$$

elde edilir.

Dolayısıyla

$$\Omega_f(m\delta) = \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |t-x| \leq m\delta}} \frac{|f(t) - f(x)|}{(1+x^2)(1+(t-x)^2)}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} |t-x| &\leq m\delta \\ -m\delta &\leq t-x \leq m\delta \end{aligned}$$

$t = x + mh$ seçilirse $|h| \leq \delta$ olup

$$\Omega_f(m\delta) = \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |t-x| \leq m\delta}} \frac{|f(t) - f(x)|}{(1+x^2)(1+(t-x)^2)} \quad (2.3.1)$$

yazılabilir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} |f(x+mh) - f(x)| &= \left| \sum_{k=1}^m f(x+kh) - f(x+(k-1)h) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^m |f(x+kh) - f(x+(k-1)h)| \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{|f(x+kh) - f(x+(k-1)h)|}{(1+h^2)(1+(x+(k-1)h)^2)} \\ &\quad \times (1+h^2)(1+(x+(k-1)h)^2) \end{aligned}$$

dr. Eşitsizliğin her iki tarafı $(1+x^2)(1+(mh)^2)$ ifadesi ile bölünüürse,

$$\begin{aligned} \frac{|f(x+mh) - f(x)|}{(1+x^2)(1+(mh)^2)} &\leq \sum_{k=1}^m \frac{|f(x+kh) - f(x+(k-1)h)|}{(1+h^2)(1+(x+(k-1)h)^2)} \\ &\quad \times \frac{(1+h^2)(1+(x+(k-1)h)^2)}{(1+x^2)(1+(mh)^2)} \end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafın $|h| \leq \delta$ üzerinden supremumu alınırsa sol taraf (2.3.1) eşitliğinden $\Omega_f(m\delta)$ ifadesine eşit olup,

$$\Omega_f(m\delta) \leq \Omega_f(\delta)(1+\delta^2) \sum_{k=1}^m \frac{(1+(x+(k-1)h)^2)}{(1+x^2)(1+(mh)^2)} \quad (2.3.2)$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}
 1 + (x + (k-1)h)^2 &\leq 1 + 2(x^2 + ((k-1)h)^2) \\
 &\leq 1 + 2(x^2 + ((k-1)h)^2) + 1 \\
 &= 2(1 + x^2 + ((k-1)h)^2)
 \end{aligned}$$

dir. $k-1 \leq m$ olduğundan

$$\begin{aligned}
 1 + (x + (k-1)h)^2 &\leq 2(1 + x^2 + (mh)^2) \\
 &\leq 2(1 + x^2 + (mh)^2 + x^2(mh)^2) \\
 &= 2(1 + x^2)(1 + (mh)^2)
 \end{aligned}$$

yazılabilir. Yani

$$\frac{(1 + (x + (k-1)h)^2)}{(1 + x^2)(1 + (mh)^2)} \leq 2$$

dir. Bu eşitsizliğin (2.3.2) ifadesinde kullanılmasıyla

$$\Omega_f(m\delta) \leq 2m(1 + \delta^2)\Omega_f(\delta)$$

elde edilir.

Lemma 2.3.4 Her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için

$$\Omega_f(\lambda\delta) \leq 2(1 + \lambda)(1 + \delta^2)\Omega_f(\delta)$$

gerçeklenir.

İspat: $\lambda \in \mathbb{R}^+$ sayısının tam kısmını $[\lambda]$ ile gösterilirse

$$[\lambda] \leq \lambda \leq 1 + [\lambda]$$

eşitsizliklerinin geçerli olduğu açıktır.

Lemma 2.3.2' den

$$\Omega_f(\lambda\delta) \leq \Omega_f((1 + [\lambda])\delta)$$

elde edilir. $1 + [\lambda] \in \mathbb{N}$ olduğundan Lemma 2.3.3 gereğince

$$\Omega_f(\lambda\delta) \leq \Omega_f((1 + [\lambda])\delta) \leq 2(1 + [\lambda])(1 + \delta^2)\Omega_f(\delta)$$

olur. Diğer taraftan $1 + [\lambda] \leq 1 + \lambda$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\Omega_f(\lambda\delta) \leq 2(1 + \lambda)(1 + \delta^2)\Omega_f(\delta)$$

elde edilir.

Lemma 2.3.5 Her $f \in C_\rho^k(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega_f(\delta) = 0$$

gerçeklenir.

İspat: $f \in C_\rho^k(\mathbb{R})$ olduğundan f fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında sürekli ve

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = k_f < \infty \quad (2.3.3)$$

dir. (2.3.3) ifadesinden her $\varepsilon > 0$ için öyle bir x_0 bulunur ki tüm $x > x_0$ noktaları ve her h reel sayısı için

$$\left| \frac{f(x)}{\rho(x)} - k_f \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \left| \frac{f(x+h)}{\rho(x+h)} - k_f \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.3.4)$$

sağlanır.

O halde

$$\begin{aligned}
\Omega_f(\delta) &= \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{\rho(x+h)} \\
&= \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \frac{|f(x+h) - f(x) + \rho(x+h)k_f - \rho(x+h)k_f|}{\rho(x+h)} \\
&\leq \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \frac{|f(x+h) - \rho(x+h)k_f|}{\rho(x+h)} + \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \frac{|f(x) - \rho(x+h)k_f|}{\rho(x+h)} \\
&= \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \left| \frac{f(x+h)}{\rho(x+h)} - k_f \right| + \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \left| \frac{f(x)}{\rho(x)} \frac{\rho(x)}{\rho(x+h)} - k_f \right|
\end{aligned}$$

elde edilir. ρ ağırlık fonksiyonu monoton artan olduğundan $\frac{\rho(x)}{\rho(x+h)} \leq 1$ olup

$$\Omega_f(\delta) \leq \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \left| \frac{f(x+h)}{\rho(x+h)} - k_f \right| + \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \left| \frac{f(x)}{\rho(x)} - k_f \right|$$

yazılabilir. Burada (2.3.4) ifadesi kullanılrsa

$$\Omega_f(\delta) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 2.3.6 Her $f \in C_\rho^k(\mathbb{R})$ ve $x, t \in [0, \infty)$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq (1 + x^2) (1 + (t-x)^2) \Omega_f(|t-x|)$$

eşitsizliği gerçekleşenir.

İspat: $\Omega_f(\delta)$ ifadesinde $\delta = |t-x|$ seçilirse

$$\Omega_f(|t-x|) = \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \frac{|f(t) - f(x)|}{(1+x^2)(1+(t-x)^2)} \geq \frac{|f(t) - f(x)|}{(1+x^2)(1+(t-x)^2)}$$

yazılabilir.

Buradan

$$\frac{|f(t) - f(x)|}{(1+x^2)(1+(t-x)^2)} \leq \Omega_f(|t-x|)$$

olduğu görülür. Böylece

$$|f(t) - f(x)| \leq (1+x^2)(1+(t-x)^2)\Omega_f(|t-x|)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 2.3.7 Her $f \in C_\rho^k(\mathbb{R})$ ve $x, t \in [0, \infty)$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq 2 \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1 \right) (1+x^2)(1+(t-x)^2)(1+\delta^2)\Omega_f(\delta)$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Ispat: Lemma 2.3.6' dan

$$|f(t) - f(x)| \leq (1+x^2)(1+(t-x)^2)\Omega_f\left(\frac{|t-x|}{\delta}\delta\right) \quad (2.3.5)$$

yazılabilir.

Ayrıca $\frac{|t-x|}{\delta} \in \mathbb{R}^+$ olup Lemma 2.3.4'den

$$\Omega_f\left(\frac{|t-x|}{\delta}\delta\right) \leq 2 \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1 \right) (1+\delta^2)\Omega_f(\delta)$$

bulunur. Bu eşitsizliğin (2.3.5) ifadesinde kullanılmasıyla

$$|f(t) - f(x)| \leq 2 \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1 \right) (1+x^2)(1+(t-x)^2)(1+\delta^2)\Omega_f(\delta)$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

2.4 Sonlu Aralıkta Sürekli Fonksiyonlara Polinomlar İle Yaklaşım

Weierstrass (1885), kapalı ve sınırlı $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı, reel değerli her sürekli f fonksiyonuna polinomlar ile yaklaşılabilcecini aşağıdaki teorem ile ifade etmiştir.

Teorem 2.4.1 (Weierstrass) f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ise her $\varepsilon > 0$ için $[a, b]$ aralığı üzerinde

$$|P(x) - f(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliğini gerçekleyen en az bir $P(x)$ polinomu vardır.

Bernstein (1912) tarafından $[0, 1]$ aralığı üzerinde Weierstrass teoremini gerçekleyen polinomların tipi ile ilgili bir teorem ispatlanmıştır. Bernstein polinomları olarak adlandırılan bu polinomların tipleri ve yaklaşım özelliklerini, Campiti *et al.* (1994), Bleimann *et al.* (1980), Groetsch *et al.* (1973), Martinez (1989) gibi birçok makalede araştırılmıştır.

Tanım 2.4.1 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, sürekli bir fonksiyon olsun.

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) c_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

ile tanımlı polinomlara *Bernstein polinomları* adı verilir.

$B_n : C(0, \infty) \rightarrow C(0, \infty)$ bir dönüşüm olduğu açıktır. Burada

$$c_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (2.4.1)$$

şeklindedir. Her belirli n doğal sayısı için $B_n(f; x)$, n . mertebeden bir polinomdur.

Bu polinomların temel yapısı; a ve b pozitif sayılar ve n bir doğal sayı olmak üzere

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n c_n^k a^k b^{n-k}$$

Binom formülüne bağlıdır. Bu formülde $x \in [0, 1]$ olmak üzere $a = x$ ve $b = 1 - x$ alırsak

$$\sum_{k=0}^n c_n^k x^k (1 - x)^{n-k} = 1 \quad (2.4.2)$$

eşitliği elde edilir.

Lemma 2.4.1 $\forall x \in [0, 1]$ için

$$\sum_{k=0}^n (k - nx)^2 c_n^k x^k (1 - x)^{n-k} = nx (1 - x)$$

gerçeklenir (Natanson 1964).

Lemma 2.4.2 $x \in [0, 1]$ ve $\delta > 0$ olsun.

$$\Delta_n = \left\{ k : \left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta, k = 0, 1, \dots, n \right\}$$

olmak üzere

$$\sum_{k \in \Delta_n} c_n^k x^k (1 - x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

İspat: $k \in \Delta_n$ için

$$\left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta \implies \frac{| \frac{k}{n} - x |}{\delta} \geq 1 \implies \frac{(k - nx)^2}{n^2 \delta^2} \geq 1$$

olduğundan

$$\sum_{k \in \Delta_n} c_n^k x^k (1 - x)^{n-k} \leq \sum_{k \in \Delta_n} \frac{(k - nx)^2}{n^2 \delta^2} c_n^k x^k (1 - x)^{n-k}$$

$$\leq \frac{1}{n^2\delta^2} \sum_{k=0}^n (k-nx)^2 c_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

eşitsizliği yazılabilir. Lemma 2.4.1 kullanılarak

$$\sum_{k \in \Delta_n} c_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{n^2\delta^2} nx (1-x)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \Delta_n} c_n^k x^k (1-x)^{n-k} &\leq \frac{1}{n^2\delta^2} \max_{x \in [0,1]} nx (1-x) \\ &= \frac{1}{4n\delta^2} \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

olur. Bu da istenen eşitsizliktir.

Teorem 2.4.2 $[0, 1]$ aralığı üzerinde f fonksiyonu sürekli ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f; x) = f(x)$$

bu aralıkta düzgün olarak gerçekleşenir.

İspat: $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[0, 1]$ aralığı üzerinde sürekli olduğundan sınırlıdır. Yani; $[0, 1]$ aralığı üzerinde

$$|f(x)| \leq M$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır.

Kapalı ve sınırlı aralık üzerinde sürekli bir fonksiyon, bu aralık üzerinde düzgün sürekliidir. Yani; $\forall \varepsilon > 0$ için $|x_1 - x_2| < \delta$ olmak üzere $\forall x_1, x_2 \in [0, 1]$ için

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliğini gerçekleyen en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

(2.4.2) eşitliğinin her iki yanı $f(x)$ ile çarpılırsa

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f(x) c_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

olur. $B_n(f; x) - f(x)$ farklı gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} B_n(f; x) - f(x) &= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) c_n^k x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^n f(x) c_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \left\{ f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right\} c_n^k x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. $k = 0, 1, \dots, n$ indis kümesi

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= \left\{ k : \left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta \right\} \\ \Delta_n &= \left\{ k : \left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta \right\} \end{aligned}$$

olacak şekilde iki sınıfaya ayrılsın. Bu durumda

$$\begin{aligned} B_n(f; x) - f(x) &= \sum_{k \in \Gamma_n} \left\{ f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right\} c_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &\quad + \sum_{k \in \Delta_n} \left\{ f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right\} c_n^k x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned} |B_n(f; x) - f(x)| &= \left| \sum_{k \in \Gamma_n} \left\{ f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right\} c_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k \in \Delta_n} \left\{ f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right\} c_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right| \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} |B_n(f; x) - f(x)| &\leq \sum_{k \in \Gamma_n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| c_n^k x^k (1-x)^{n-k} \quad (2.4.4) \\ &\quad + \sum_{k \in \Delta_n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| c_n^k x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

elde edilir. f fonksiyonu sürekli olduğundan $k \in \Gamma_n$ için

$$\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliği sağlanır. f fonksiyonu sınırlı olduğundan $k \in \Delta_n$ için

$$\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \leq 2M$$

eşitsizliği sağlanır. Bulunan bu iki eşitsizlik (2.4.4) ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} |B_n(f; x) - f(x)| &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \in \Gamma_n} c_n^k x^k (1-x)^{n-k} + 2M \sum_{k \in \Delta_n} c_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n c_n^k x^k (1-x)^{n-k} + 2M \sum_{k \in \Delta_n} c_n^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + 2M \sum_{k \in \Delta_n} c_n^k x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

eşitsizliği elde edilir.

(2.4.5) eşitsizliğinin sağ tarafındaki toplam ifadesi, Lemma 2.4.2'de verilen (2.4.3) eşitsizliğini gerçekler. Bu durumda

$$|B_n(f; x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\delta^2}$$

elde edilir. Yeterince büyük n değerleri için

$$\frac{M}{2n\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olup, $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için istenen

$$|B_n(f; x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ifadesi gerçekleşir.

Keyfi $[a, b]$ aralığı üzerinde de Bernstein polinomları Weierstrass Teoremi'ni gerçekler. Bunu aşağıdaki teorem ile ifade edelim.

Teorem 2.4.3 $f \in C(a, b)$ ise $[a, b]$ aralığı üzerinde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f; x) = f(x)$$

düzungün olarak gerçekleşir.

İspat: f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli olsun. $[0, 1]$ aralığında tanımlı, sürekli

$$\varphi(y) = f(a + y(b - a))$$

fonksiyonu ve

$$\theta(y) = \sum_{k=0}^n c_k y^k$$

polinomu gözönüne alınınsın. Teorem 2.4.2 gereğince; $\forall y \in [0, 1]$ için

$$\left| f(a + y(b - a)) - \sum_{k=0}^n c_k y^k \right| < \varepsilon$$

koşulunun sağlanması gereklidir. $\forall x \in [a, b]$ için $\frac{x-a}{b-a}$ kesri $[0, 1]$ aralığındadır. Bu kesir yukarıda y yerine yazılırsa

$$\left| f\left(a + \frac{x-a}{b-a}(b-a)\right) - \sum_{k=0}^n c_k \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k \right| < \varepsilon$$

olur. Buradan

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n c_k \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k \right| < \varepsilon$$

olup, bu da

$$P(x) = \sum_{k=0}^n c_k \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k$$

polinomunun f fonksiyonuna olan yakınsaklığıdır. Böylelikle istenilen elde edilmiş olur.

2.5 Lineer Pozitif Operatörler ve Yaklaşım Özellikleri

Lineer pozitif operatörlerin tanımı ve bazı önemli özellikleri verilim (P. P. Korovkin 1960).

Tanım 2.5.1 X ve Y fonksiyon uzayları olsun. $L : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olmak üzere $\forall f \in X$ fonksiyonuna karşılık gelen bir $g \in Y$ fonksiyonu varsa, L

$$g(x) = L(f; x)$$

şeklinde bir *operatördür*, denir. L operatörünün tanım bölgesi $X = D(L)$, değer kümesi ise $R(L)$ olmak üzere

$$L(f; x) = L(f(t); x)$$

ile gösterilir.

Tanım 2.5.2 X lineer bir uzay olsun. $\forall f, g \in X$ için, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $af + bg \in X$ olmak üzere L operatörü

$$L(af + bg; x) = aL(f; x) + bL(g; x)$$

koşulunu gerçekliyor ise L operatörüne *lineer operatör* adı verilir.

$c \neq 0$ için L lineer bir operatör olduğundan

$$L(0; x) = L(c \cdot 0; x) = cL(0; x)$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$L(0; x) = 0$$

olduğu görülür.

Lineer operatörler sınıfının çok önemli bir alt sınıfı lineer pozitif operatörlerdir.

Tanım 2.5.3 $X^+ = \{f \in X : f \geq 0\}$, $Y^+ = \{g \in Y : g \geq 0\}$ olsun. Eğer X uzayında tanımlanmış L lineer operatörü X^+ kümesindeki herhangi bir f fonksiyonunu pozitif fonksiyona dönüştürüyorsa o taktirde bu lineer operatöre *lineer pozitif operatör* denir. L lineer operatörü için $f \geq 0$ olduğunda $L(f; x) \geq 0$ gerçekleşir.

Şimdi lineer pozitif operatörlerin önemli bazı özelliklerini verelim.

Özellik 2.5.1 Lineer pozitif operatörler monotondur.

Gerçekten; $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \geq g(x)$ ise $f(x) - g(x) \geq 0$ dir. L operatörü pozitif olduğundan

$$L(f - g; x) \geq 0$$

olur ve L operatörünün lineerlik özelliğinden

$$L(f; x) - L(g; x) \geq 0$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Özellik 2.5.2 L lineer pozitif operatör olsun. Bu durumda

$$|L(f; x)| \leq L(|f|; x)$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Gerçekten; $\forall t \in [a, b]$ için

$$-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$$

eşitsizliği sağlanır.

L operatörünün monoton olma özelliğinden

$$-L(|f|;x) \leq L(f;x) \leq L(|f|;x)$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$|L(f;x)| \leq L(|f|;x)$$

elde edilir.

Tanım 2.5.4 $L : X \rightarrow Y$ lineer dönüşüm olsun. Eğer $\forall f \in X$ için

$$\|L(f;x)\|_Y \leq C \|f\|_X$$

olacak şekilde $C > 0$ sayısı varsa L operatörüne *sınırlı lineer operatör* adı verilir.

Bu C sabitlerinin en küçüğüne L operatörünün *normu* denir.

$$\|L\| = \inf \{C : \|L(f;x)\|_Y \leq C \|f\|_X\}$$

şeklinde gösterilir.

L lineer operatörü için

$$\begin{aligned} \|L\| &= \sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f;x)\|_Y}{\|f\|_X} \\ \|L\| &= \sup_{\|f\|_X=1} \|L(f;x)\|_Y \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

$X = C_\rho(\mathbb{R})$ ve $Y = B_\rho(\mathbb{R})$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|L\|_{C_\rho \rightarrow B_\rho} &= \sup_{\|f\|_\rho=1} \|L(f;x)\|_\rho \\ &\leq \sup_{\|f\|_\rho=1} \left\| L\left(\frac{|f|}{\rho} \cdot \rho; x\right) \right\|_\rho \\ &\leq \|L(\rho;x)\|_\rho \end{aligned}$$

olur. Diğer yandan $\|\rho\|_\rho = 1$ olduğu için

$$\begin{aligned}\|L\|_{C_\rho \rightarrow B_\rho} &= \sup_{\|f\|_\rho=1} \|L(f; x)\|_\rho \\ &\geq \|L(\rho; x)\|_\rho\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu iki eşitsizlikten

$$\|L\|_{C_\rho \rightarrow B_\rho} = \|L(\rho; x)\|_\rho \quad (2.5.1)$$

elde edilir. Bu eşitlik, C_ρ dan B_ρ ya dönüşüm yapan lineer operatörlerin sınırlı olduğunu gösterir. Çünkü $\rho \in C_\rho$ için $L(\rho; x) \in B_\rho$ olur. Operatörün normunun tanımdan sınırlı lineer operatörler için

$$\|L(f; x)\| \leq \|L\| \|f\|$$

eşitsizliği geçerlidir. Özel durumda $L : C_\rho \rightarrow B_\rho$ olduğunda

$$\|L(f; x)\|_\rho \leq \|L\|_{C_\rho \rightarrow B_\rho} \|f\|_\rho$$

olup, (2.5.1) ifadesinden

$$\|L(f; x)\|_\rho \leq \|L(\rho; x)\|_\rho \|f\|_\rho$$

eşitsizliği sağlanır.

Korovkin (1953) tarafından $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli f fonksiyonuna lineer pozitif operatörler dizisi ile yaklaşım yapılabileceği aşağıdaki teorem ile ifade ve ispat edilmiştir.

Teorem 2.5.1 (Korovkin 1953): (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi, $[a, b]$ aralığında $n \rightarrow \infty$ iken

$$L_n(1; x) \Rightarrow 1 \quad (2.5.2)$$

$$L_n(t; x) \Rightarrow x \quad (2.5.3)$$

$$L_n(t^2; x) \Rightarrow x^2 \quad (2.5.4)$$

koşullarını gerçekliyorsa, $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli ve tüm reel eksende sınırlı herhangi bir f fonksiyonu için $n \rightarrow \infty$ iken $a \leq x \leq b$ olmak üzere

$$L_n(f; x) \Rightarrow f(x)$$

gerçeklenir.

İspat: f fonksiyonu reel eksende sınırlı olduğundan $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$|f(x)| \leq M \quad (2.5.5)$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır.

$f \in C(a, b)$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $|t - x| < \delta$ olmak üzere her $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a, b]$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \quad (2.5.6)$$

esitsizliğini gerçekleyen en az bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Diğer yandan $|t - x| \geq \delta$ için

$$\frac{(t - x)^2}{\delta^2} \geq 1 \implies \frac{2M}{\delta^2} (t - x)^2 \geq 2M$$

sağlanır. (2.5.5), (2.5.6) eşitsizlikleri ve üçgen eşitsizliği kullanılarak $\forall \varepsilon > 0$ için

$$|f(t) - f(x)| < \frac{2M}{\delta^2} (t - x)^2 + \varepsilon \quad (2.5.7)$$

bulunur.

Lineer pozitif operatörlerin özelliklerinden

$$\begin{aligned}
\|L_n(f; x) - f(x)\|_{C(a,b)} &= \|L_n(f(t) - f(x); x) + f(x)(L_n(1; x) - 1)\|_{C(a,b)} \\
&\leq \|L_n(f(t) - f(x); x)\|_{C(a,b)} \\
&\quad + \|f\|_{C(a,b)} \|L_n(1; x) - 1\|_{C(a,b)} \\
&\leq \|L_n(|f(t) - f(x)|; x)\|_{C(a,b)} \\
&\quad + \|f\|_{C(a,b)} \|L_n(1; x) - 1\|_{C(a,b)}
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizliğin ikinci terimi (2.5.2) ifadesinden dolayı sıfır yakınsar. Yani $n \rightarrow \infty$ iken

$$\|f\|_{C(a,b)} \|L_n(1; x) - 1\|_{C(a,b)} \leq \varepsilon_n$$

eşitsizliğini sağlayan $\varepsilon_n \rightarrow 0$ dizisi vardır. Bu durumda

$$\|L_n(f; x) - f(x)\|_{C(a,b)} \leq \|L_n(|f(t) - f(x)|; x)\|_{C(a,b)} + \varepsilon_n \quad (2.5.8)$$

gerçeklenir. (2.5.8) eşitsizliğinin sağındaki ilk terimi gözönüne alalım. (2.5.7) eşitsizliği ve lineer pozitif operatörlerin özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
L_n(|f(t) - f(x)|; x) &\leq L_n\left(\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 + \varepsilon; x\right) \\
&= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n((t-x)^2; x) \\
&= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M}{\delta^2} [L_n(t^2; x) - 2xL_n(t; x) + x^2 L_n(1; x)] \\
&\leq \varepsilon [L_n(1; x) - 1] + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \{ [L_n(t^2; x) - x^2] \\
&\quad - 2x[L_n(t; x) - x] + x^2 [L_n(1; x) - 1] \} \\
&= \varepsilon + \left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} x^2\right) [L_n(1; x) - 1] + \frac{2M}{\delta^2} [L_n(t^2; x) - x^2] \\
&\quad - \frac{4M}{\delta^2} x [L_n(t; x) - x]
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}x^2 = g(x)$ ve $-\frac{4M}{\delta^2}x = h(x)$ olsun. $\forall x \in [a, b]$ için

$$g(x) \leq \sup_{x \in [a, b]} |g(x)| = b \text{ ve } h(x) \leq \sup_{x \in [a, b]} |h(x)| = c$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} L_n(|f(t) - f(x)|; x) &\leq \varepsilon + b[L_n(1; x) - 1] + \frac{2M}{\delta^2} [L_n(t^2; x) - x^2] \\ &\quad + c[L_n(t; x) - x] \\ \|L_n(|f(t) - f(x)|; x)\|_{C(a,b)} &\leq \varepsilon + b \|L_n(1; x) - 1\|_{C(a,b)} \\ &\quad + \frac{2M}{\delta^2} \|L_n(t^2; x) - x^2\|_{C(a,b)} + c \|L_n(t; x) - x\|_{C(a,b)} \end{aligned}$$

elde edilir. (2.5.2), (2.5.3) ve (2.5.4) ifadelerinden dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(|f(t) - f(x)|; x)\|_{C[a,b]} = 0$$

olur. Bu durumda (2.5.8) ifadesinin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f(t); x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

olduğu görülür. Bu da ispatı tamamlar.

1962 yılında Baskakov, $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli ve M_f , f fonksiyonuna bağlı bir sabit olmak üzere

$$|f(x)| \leq M_f (1 + x^2) \tag{2.5.9}$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonu için Korovkin Teoremi'nin gerçeklendiğini ispatlamıştır. Gerçekten; $f \in C[a, b]$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için her $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a, b]$ için $|t - x| < \delta$ olduğunda

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliğini gerçekleyen en az bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

$|t - x| \geq \delta$ olduğunda $\forall x \in [a, b]$ için f fonksiyonu (2.5.9) koşulunu sağladığından

$$\begin{aligned}
|f(t) - f(x)| &\leq M_f(1 + x^2) + M_f(1 + t^2) \\
&= M_f(2 + t^2 + x^2) \\
&= M_f(2 + (t - x + x)^2 + x^2) \\
&= M_f(2 + (t - x)^2 + 2x(t - x) + 2x^2) \\
&\leq M_f\left(2\frac{(t - x)^2}{\delta^2} + (t - x)^2 + 2x\frac{(t - x)^2}{\delta} + 2x^2\frac{(t - x)^2}{\delta^2}\right) \\
&= M_f(t - x)^2\left(\frac{2}{\delta^2} + 1 + \frac{2x}{\delta} + \frac{2x^2}{\delta^2}\right) \\
&\leq M_f(t - x)^2\left(\frac{2}{\delta^2} + 1 + \sup_{x \in [a, b]} \frac{2x}{\delta} + \sup_{x \in [a, b]} \frac{2x^2}{\delta^2}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitsizlikte

$$c = M_f\left(\frac{2}{\delta^2} + 1 + \sup_{x \in [a, b]} \frac{2x}{\delta} + \sup_{x \in [a, b]} \frac{2x^2}{\delta^2}\right)$$

almırsa

$$|f(t) - f(x)| \leq c(t - x)^2$$

elde edilir. Bu durumda $\forall x \in [a, b]$ ve $\forall t \in \mathbb{R}$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + c(t - x)^2$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
L_n(|f(t) - f(x)|; x) &\leq L_n(\varepsilon + c(t - x)^2; x) \\
&= \varepsilon L_n(1; x) + c\{L_n(t^2; x) - 2xL_n(t; x) + x^2L_n(1; x)\} \\
&= \varepsilon[L_n(1; x) - 1] + \varepsilon + c\{[L_n(t^2; x) - x^2] \\
&\quad - 2x[L_n(t; x) - x] + x^2[L_n(1; x) - 1]\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

$k = c \sup_{x \in [a,b]} |-2x|$ ve $l = c \sup_{x \in [a,b]} |x^2|$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|L_n(|f(t) - f(x)|; x)\|_{C(a,b)} &\leq \varepsilon + (\varepsilon + l) \|L_n(1; x) - 1\|_{C(a,b)} + k \|L_n(t; x) - x\|_{C(a,b)} \\ &\quad + c \|L_n(t^2; x) - x^2\|_{C(a,b)} \end{aligned}$$

esitsizliği sağlanır. (2.5.2), (2.5.3) ve (2.5.4) ifadelerinden dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(|f(t) - f(x)|; x)\|_{C(a,b)} = 0$$

olur. Bu durumda (2.5.8) esitsizliğinden istenen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f; x) - f(x)\|_{C(a,b)} = 0$$

elde edilir. O halde Korovkin teoremi sağlanmış olur.

Şimdi de sınırsız bölgelerde yaklaşımı araştıralım.

Sınırsız bölgelerde tanımlanmış $C_\rho(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$ uzayında keyfi L_n lineer pozitif operatörler yardımıyla yaklaşımın gerçekleşmediğini aşağıdaki teorem ile verelim.

Teorem 2.5.2 $\rho(x) = 1 + \Phi^2(x)$, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Phi(x) = \pm\infty$ olmak üzere

$L_n : C_\rho(\mathbb{R}) \rightarrow C_\rho(\mathbb{R})$ tanımlı bir lineer pozitif operatörler dizisi olsun. Bu dizi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(1; x) - 1\|_\rho = 0 \tag{2.5.10}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(\Phi, x) - \Phi\|_\rho = 0 \tag{2.5.11}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(\Phi^2; x) - \Phi^2\|_\rho = 0 \tag{2.5.12}$$

koşullarını sağlar, fakat

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \|L_n f^* - f^*\|_\rho > 0$$

ifadesini gerçekleyen $f^* \in C_\rho(\mathbb{R})$ fonksiyonu bulunur (Gadjiev ve İbikli 1999, İbikli 2003).

İspat: Genelligi bozmadan $\Phi(0) = 0$ olsun.

$$l(x; \Phi, f) = \frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+1)} f(x+1) - 2f(x) + \frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+2)} f(x+2)$$

notasyonunu kullanalım. (L_n) operatörler dizisi

$$L_n(f; x) = \begin{cases} f(x) + \frac{\rho(x)}{4\rho(n)} l(x; \Phi, f) & ; \quad 0 \leq x \leq n \\ f(x) + \frac{1}{4} l(x; \Phi, f) & ; \quad x \geq n \\ f(x) - \frac{1}{2\rho(n)} f(x) & ; \quad x \leq 0 \end{cases}$$

ile tanımlansın.

(L_n) lineer pozitif operatörler dizisidir. Gerçekten, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \geq 0$ olması koşuluyla $L_n(f; x) \geq 0$ 'dır ve $\forall f_1, f_2 \in C_\rho(\mathbb{R})$ ve $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ için $0 \leq x \leq n$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} L_n(a_1 f_1 + a_2 f_2; x) &= (a_1 f_1 + a_2 f_2)(x) + \frac{\rho(x)}{4\rho(n)} l(x; \Phi, a_1 f_1 + a_2 f_2) \\ &= a_1 f_1(x) + a_1 \frac{\rho(x)}{4\rho(n)} l(x; \Phi, f_1) \\ &\quad + a_2 f_2(x) + a_2 \frac{\rho(x)}{4\rho(n)} l(x; \Phi, f_2) \\ &= a_1 L_n(f_1; x) + a_2 L_n(f_2; x) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

$x \geq n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} L_n(a_1 f_1 + a_2 f_2; x) &= (a_1 f_1 + a_2 f_2)(x) + \frac{1}{4} l(x; \Phi, a_1 f_1 + a_2 f_2) \\ &= a_1 f_1(x) + a_1 \frac{1}{4} l(x; \Phi, f_1) + a_2 f_2(x) + a_2 \frac{1}{4} l(x; \Phi, f_2) \\ &= a_1 L_n(f_1; x) + a_2 L_n(f_2; x) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

$x \leq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
L_n(a_1f_1 + a_2f_2; x) &= (a_1f_1 + a_2f_2)(x) - \frac{1}{2\rho(n)}(a_1f_1 + a_2f_2)(x) \\
&= a_1f_1(x) - a_1\frac{1}{2\rho(n)}f_1(x) + a_2f_2(x) - a_2\frac{1}{2\rho(n)}f_2(x) \\
&= a_1L_n(f_1; x) + a_2L_n(f_2; x)
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Bu durumda $\forall x \in \mathbb{R}$ için (L_n) operatörler dizisinin lineer olduğu görülür.

L_n 'nin $C\rho(\mathbb{R})$ den $C\rho(\mathbb{R})$ ye bir dönüşüm olduğunu gösterelim. Bunun için $L_n(\rho; x) \leq M\rho(x)$ olacak şekilde $M > 0$ sayısının varlığını göstermek yeterlidir.

$0 \leq x \leq n$ için,

$$\begin{aligned}
L_n(\rho; x) &= \rho(x) + \frac{\rho(x)}{4\rho(n)} \left[\frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+1)}\rho(x+1) - 2\rho(x) + \frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+2)}\rho(x+2) \right] \\
&= \rho(x) + \frac{\rho(x)}{4\rho(n)} \left[\frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+1)} (\Phi^2(x+1) + 1) - 2(\Phi^2(x) + 1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+2)} (\Phi^2(x+2) + 1) \right] \\
&= \rho(x) + \frac{\rho(x)}{4\rho(n)} \left[\frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+1)} + \frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+2)} - 2 \right]
\end{aligned} \tag{2.5.13}$$

olarak yazılabilir. Φ fonksiyonu monoton artan olduğundan

$$\frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+1)} \leq 1$$

olup, bu eşitsizlik (2.5.13) ifadesinde kullanılrsa

$$L_n(\rho; x) \leq \rho(x)$$

eşitsizliği elde edilir.

$x \geq n$ için

$$L_n(\rho; x) = \rho(x) + \frac{1}{4} \left[\frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+1)} \rho(x+1) - 2\rho(x) + \frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+2)} \rho(x+2) \right]$$

olmak üzere bu ifadede $\rho(x)$ fonksiyonu yerine yazılıp, Φ fonksiyonunun artanlığı kullanılırsa

$$L_n(f; x) \leq \rho(x)$$

ifadesi elde edilir.

$x \leq 0$ için

$$L_n(\rho; x) = \rho(x) - \frac{\rho(x)}{2\rho(n)} = \frac{2\rho(n) - 1}{2\rho(n)} \rho(x)$$

olup,

$$\frac{2\rho(n) - 1}{2\rho(n)} \leq 1$$

olduğundan

$$L_n(\rho; x) \leq \rho(x)$$

ifadesi elde edilir.

Bu durumda $\forall x \in \mathbb{R}$ için $L_n(f; x) \leq \rho(x)$ ifadesi sağlanır. (L_n) lineer pozitif operatörler dizisinin $C_\rho(\mathbb{R})$ den $C_\rho(\mathbb{R})$ ye bir dönüşüm olduğu ispatlanmış olur.

(L_n) lineer pozitif operatörler dizisinin Teorem 2.5.2'nin koşullarını gerçeklediğini gösterelim.

$0 \leq x \leq n$ için,

$$\begin{aligned} L_n(1; x) &= 1 + \frac{\rho(x)}{4\rho(n)} \left[\frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+1)} - 2 + \frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+2)} \right] \\ \frac{|L_n(1; x) - 1|}{\rho(x)} &\leq \frac{1}{4\rho(n)} \left[\left| \frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+1)} \right| + \left| \frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+2)} \right| + 2 \right] \end{aligned}$$

bulunur.

Φ fonksiyonunun monoton artanlığından

$$\frac{|L_n(1; x) - 1|}{\rho(x)} \leq \frac{1}{\rho(n)}$$

olarak yazılabilir. Buradan $\rho(n) = 1 + \Phi^2(n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq x \leq n} \frac{|L_n(1; x) - 1|}{\rho(x)} &\leq \frac{1}{1 + \Phi^2(n)} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq n} \frac{|L_n(1; x) - 1|}{\rho(x)} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \Phi^2(n)} = 0 \end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(1; x) - 1\|_\rho = 0$$

elde edilir.

$x \geq n$ için

$$\begin{aligned} L_n(1; x) &= 1 + \frac{1}{4} \left[\frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+1)} - 2 + \frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+2)} \right] \\ \frac{|L_n(1; x) - 1|}{\rho(x)} &\leq \frac{1}{4\rho(x)} \left[\frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+1)} + 2 + \frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+2)} \right] \end{aligned}$$

olup, Φ fonksiyonunun monoton artanlığından

$$\frac{|L_n(1; x) - 1|}{\rho(x)} \leq \frac{1}{\rho(x)}$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} \sup_{x \geq n} \frac{|L_n(1; x) - 1|}{\rho(x)} &\leq \sup_{x \geq n} \frac{1}{\rho(x)} \\ &= \frac{1}{\rho(n)} \\ &= \frac{1}{1 + \Phi^2(n)} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq n} \frac{|L_n(1; x) - 1|}{\rho(x)} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \Phi^2(n)} = 0 \end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(1; x) - 1\|_\rho = 0$$

elde edilir.

$x \leq 0$ için

$$\begin{aligned} L_n(1; x) &= 1 - \frac{1}{2\rho(n)} \\ \frac{|L_n(1; x) - 1|}{\rho(x)} &\leq \frac{1}{2\rho(n)} \\ \sup_{x \leq 0} \frac{|L_n(1; x) - 1|}{\rho(x)} &\leq \frac{1}{2\rho(n)} \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \leq 0} \frac{|L_n(1; x) - 1|}{\rho(x)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\rho(n)} = 0$$

olup,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(1; x) - 1\|_\rho = 0$$

elde edilir. Bu durumda $\forall x \in \mathbb{R}$ için (2.5.10) koşulu gerçekleşir.

$0 \leq x \leq n$ için

$$\begin{aligned} L_n(\Phi; x) &= \Phi(x) + \frac{\rho(x)}{4\rho(n)} \left[\frac{\Phi^2(x)}{\Phi(x+1)} - 2\Phi(x) + \frac{\Phi^2(x)}{\Phi(x+2)} \right] \\ |L_n(\Phi; x) - \Phi(x)| &\leq \frac{\rho(x)}{4\rho(n)} \left[\frac{\Phi^2(x)}{|\Phi(x+1)|} + 2|\Phi(x)| + \frac{\Phi^2(x)}{|\Phi(x+2)|} \right] \\ \frac{|L_n(\Phi; x) - \Phi(x)|}{\rho(x)} &\leq \frac{1}{4\rho(n)} \left[\frac{\Phi^2(x)}{|\Phi(x+1)|} + 2|\Phi(x)| + \frac{\Phi^2(x)}{|\Phi(x+2)|} \right] \\ &= \frac{1}{4\rho(n)} \left[|\Phi(x)| \left(\left| \frac{\Phi(x)}{\Phi(x+1)} \right| + \left| \frac{\Phi(x)}{\Phi(x+2)} \right| + 2 \right) \right] \\ &\leq \frac{|\Phi(x)|}{\rho(n)} \end{aligned}$$

bulunur.

Buradan

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq x \leq n} \frac{|L_n(\Phi; x) - \Phi(x)|}{\rho(x)} &\leq \sup_{0 \leq x \leq n} \frac{|\Phi(x)|}{\rho(n)} \\ &= \frac{|\Phi(n)|}{\rho(n)} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq n} \frac{|L_n(\Phi; x) - \Phi(x)|}{\rho(x)} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\Phi(n)|}{(1 + \Phi^2(n))} = 0 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(\Phi; x) - \Phi(x)\|_\rho = 0$$

elde edilir.

$x \geq n$ için

$$\begin{aligned} L_n(\Phi; x) &= \Phi(x) + \frac{1}{4} \left[\frac{\Phi^2(x)}{\Phi(x+1)} - 2\Phi(x) + \frac{\Phi^2(x)}{\Phi(x+2)} \right] \\ |L_n(\Phi; x) - \Phi(x)| &\leq \frac{1}{4} |\Phi(x)| \left[\left| \frac{\Phi(x)}{\Phi(x+1)} \right| + 2 + \left| \frac{\Phi(x)}{\Phi(x+2)} \right| \right] \\ \frac{|L_n(\Phi; x) - \Phi(x)|}{\rho(x)} &\leq \frac{|\Phi(x)|}{4\rho(x)} \left[\left| \frac{\Phi(x)}{\Phi(x+1)} \right| + 2 + \left| \frac{\Phi(x)}{\Phi(x+2)} \right| \right] \\ &\leq \frac{|\Phi(x)|}{\rho(x)} \end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned} \sup_{x \geq n} \frac{|L_n(\Phi; x) - \Phi(x)|}{\rho(x)} &\leq \sup_{x \geq n} \frac{|\Phi(x)|}{\rho(x)} \\ &= \frac{|\Phi(n)|}{\rho(n)} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq n} \frac{|L_n(\Phi; x) - \Phi(x)|}{\rho(x)} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\Phi(n)|}{\rho(n)} = 0 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(\Phi; x) - \Phi(x)\|_\rho = 0$$

elde edilir.

$x \leq 0$ için

$$\begin{aligned}
L_n(\Phi; x) &= \Phi(x) - \frac{1}{2\rho(n)}\Phi(x) \\
\frac{|L_n(\Phi; x) - \Phi(x)|}{\rho(x)} &= \frac{1}{\rho(x)} \left| -\frac{1}{2\rho(n)}\Phi(x) \right| \\
&\leq \frac{|\Phi(x)|}{2\rho(n)} \\
\sup_{x \leq n} \frac{|L_n(\Phi; x) - \Phi(x)|}{\rho(x)} &\leq \sup_{x \leq n} \frac{1}{2\rho(n)} |\Phi(n)| \\
&\leq \frac{|\Phi(n)|}{2\rho(n)}
\end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \leq n} \frac{|L_n(\Phi; x) - \Phi(x)|}{\rho(x)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\Phi(n)|}{2\rho(n)} = 0$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(\Phi; x) - \Phi(x)\|_\rho = 0$$

elde edilir. Bu durumda $\forall x \in \mathbb{R}$ için (2.5.11) koşulu gerçekleşir.

$0 \leq x \leq n$ için

$$\begin{aligned}
L_n(\Phi^2; x) - \Phi^2(x) &= \frac{\rho(x)}{4\rho(n)} \left[\frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+1)} \Phi^2(x+1) - 2\Phi^2(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+2)} \Phi^2(x+2) \right] \\
&= \frac{\rho(x)}{4\rho(n)} [2\Phi^2(x) - 2\Phi^2(x)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(\Phi^2; x) - \Phi^2(x)\|_\rho = 0$$

elde edilir.

$x \geq n$ için,

$$\begin{aligned}
L_n(\Phi^2; x) - \Phi^2(x) &= \frac{1}{4} \left[\frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+1)} \Phi^2(x+1) - 2\Phi^2(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+2)} \Phi^2(x+2) \right] \\
&= \frac{1}{4} [2\Phi^2(x) - 2\Phi^2(x)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(\Phi^2; x) - \Phi^2(x)\|_\rho = 0$$

elde edilir.

$x \leq 0$ için

$$\begin{aligned}
L_n(\Phi^2; x) - \Phi^2(x) &= -\frac{1}{2\rho(n)} \Phi^2(x) \\
\frac{|L_n(\Phi^2; x) - \Phi^2(x)|}{\rho(x)} &= \frac{1}{\rho(x)} \left| -\frac{1}{2\rho(n)} \Phi^2(x) \right| \\
&\leq \frac{\Phi^2(x)}{\rho(n)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sup_{x \leq 0} \frac{|L_n(\Phi^2; x) - \Phi^2(x)|}{\rho(x)} &= \sup_{x \leq 0} \frac{\Phi^2(x)}{2\rho(n)} \\
&\leq \frac{\Phi^2(0)}{2\rho(n)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(\Phi^2; x) - \Phi^2(x)\|_\rho = 0$$

elde edilir. Bu durumda $\forall x \in \mathbb{R}$ için (2.5.12) koşulu gerçekleşenir.

(L_n) operatörler dizisinin lineer pozitif olduğu ve (2.5.10), (2.5.11), (2.5.12) koşullarını sağladığı gösterilmiştir. Burada (L_n) operatörler dizisi yardımıyla yaklaşımı gerçeklemeden $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayına ait olan f^* fonksiyonu bulunur.

$$f^*(x) = \Phi^2(x) \cos \pi x$$

fonksiyonunu gözönüne alalım.

$$\begin{aligned} |f^*(x)| &= |\Phi^2(x)| \cdot |\cos \pi x| \\ &\leq \rho(x) \end{aligned}$$

olduğundan $f^* \in C_\rho(\mathbb{R})$ olur.

$0 \leq x \leq n$ için

$$\begin{aligned} L_n(f^*; x) - f^*(x) &= \frac{\rho(x)}{4\rho(n)} \left[\frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+1)} f^*(x+1) - 2f^*(x) + \frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+2)} f^*(x+2) \right] \\ &= \frac{\rho(x)}{4\rho(n)} \left[\frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+1)} \Phi^2(x+1) \cos \pi(x+1) \right. \\ &\quad \left. - 2\Phi^2(x) \cos \pi x + \frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+2)} \Phi^2(x+2) \cos \pi(x+2) \right] \\ &= \frac{\rho(x)}{4\rho(n)} \left[\Phi^2(x) (\cos \pi x \cos \pi - \sin \pi x \sin \pi) - 2\Phi^2(x) \cos \pi x \right. \\ &\quad \left. + \Phi^2(x) (\cos \pi x \cos 2\pi - \sin \pi x \sin 2\pi) \right] \\ &= \frac{\rho(x)}{4\rho(n)} \left[-\Phi^2(x) \cos \pi x - 2\Phi^2(x) \cos \pi x + \Phi^2(x) \cos \pi x \right] \\ &= \frac{\rho(x)}{2\rho(n)} [-\Phi^2(x) \cos \pi x] \end{aligned}$$

olup

$$\frac{|L_n(f^*; x) - f^*(x)|}{\rho(x)} = \frac{\Phi^2(x) |\cos \pi x|}{2\rho(n)}$$

elde edilir.

Buradan

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq x \leq n} \frac{|L_n(f^*; x) - f^*(x)|}{\rho(x)} &= \sup_{0 \leq x \leq n} \frac{\Phi^2(x) |\cos \pi x|}{2\rho(n)} \\ &\leq \frac{\Phi^2(n)}{2\rho(n)} \\ &= \frac{\Phi^2(n)}{2(1 + \Phi^2(n))} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f^*; x) - f^*(x)\|_\rho \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi^2(n)}{2(1 + \Phi^2(n))} = \frac{1}{2}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 2.5.1 Eğer $L_n : C_\rho(\mathbb{R}) \rightarrow B_\rho(\mathbb{R})$ lineer pozitif operatörler dizisi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(\Phi^\nu; x) - \Phi^\nu(x)\|_\rho = 0; \quad \nu = 0, 1, 2$$

ifadesini sağlarsa $f \in C_\rho(\mathbb{R})$ için herhangi bir sonlu $[a, b]$ aralığında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f; x) - f\|_{C(a, b)} = 0$$

gerçeklenir (Haciiev ve Hacisalihoğlu 1995).

Aşağıdaki teorem, $C_\rho^k(\mathbb{R}) \subset C_\rho(\mathbb{R})$ uzayında keyfi (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi ile yaklaşımın mümkün olduğunu gösterir.

Teorem 2.5.3 $L_n : C_\rho(\mathbb{R}) \rightarrow B_\rho(\mathbb{R})$ lineer pozitif operatörler dizisi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(\Phi^\nu; x) - \Phi^\nu(x)\|_\rho = 0; \quad \nu = 0, 1, 2 \tag{2.5.14}$$

ifadesini sağlarsa keyfi $f \in C_\rho^k(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n f - f\|_\rho = 0 \tag{2.5.15}$$

gerçeklenir (Gadjiev 1974, Haciyev ve Hacisalihoğlu 1995).

İspat: Bu teoremi $C_\rho^0(\mathbb{R})$ uzayı için ispatlamak yeterlidir. Bunun için (2.5.15) ifadesinin $C_\rho^0(\mathbb{R})$ den alınan keyfi bir fonksiyon için geçerli olduğunu kabul edelim ve $f \in C_\rho^k(\mathbb{R})$ herhangi bir fonksiyon olsun. Bu durumda $C_\rho^0(\mathbb{R})$ uzayının tanımına göre

$$F(x) = f(x) - k_f \rho(x)$$

fonksiyonu $C_\rho^0(\mathbb{R})$ uzayına aittir. Buradan

$$f(x) = F(x) + k_f \rho(x)$$

olmak üzere

$$\|L_n f - f\|_\rho \leq \|L_n F - F\|_\rho + k_f \|L_n \rho - \rho\|_\rho$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte birinci terim $F \in C_\rho^0(\mathbb{R})$ olduğundan sıfıra yakınsar. İkinci terim ise (2.5.14) koşulundan dolayı sıfıra yakınsar. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n f - f\|_\rho = 0$$

olur. Dolayısıyla ispatı $C_\rho^0(\mathbb{R})$ uzayı için yapmak yeterlidir.

$f \in C_\rho^0(\mathbb{R})$ olsun. $C_\rho^0(\mathbb{R})$ uzayının tanımı gereğince

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = k_f = 0$$

olur. O halde her $\varepsilon > 0$ için $|x| > x'_0$ olmak üzere

$$|f(x)| < \varepsilon \rho(x)$$

eşitsizliğini gerçekleyen en az bir x'_0 noktası bulunabilir.

Ayrıca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x) = \infty$$

olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $|x| > x_0''$ iken

$$\rho(x) > \frac{1}{\varepsilon}$$

eşitsizliği gerçekleyen en az bir x_0'' noktası vardır.

Eğer

$$x_0 = \max_{-\infty < x < \infty} \{x_0', x_0''\}$$

olarak belirlenirse tüm $|x| > x_0$ için

$$|f(x)| < \varepsilon \rho(x) \text{ ve } \rho(x) > \frac{1}{\varepsilon}$$

koşulları gerçekleşir.

Kabul edelim ki $x_1 > x_0$ olsun.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & ; |x| \leq x_0 \\ \text{do\u0111rusal} & ; x \in [-x_1, -x_0] \cup [x_0, x_1] \\ 0 & ; |x| > x_1 \end{cases}$$

şeklinde sürekli bir g fonksiyonu tanımlayalım.

$$\begin{aligned} \|L_n f - f\|_\rho &= \|L_n(f; x) - f - L_n(g; x) + L_n(g; x) - g + g\|_\rho \\ &\leq \|L_n(f; x) - L_n(g; x)\|_\rho + \|L_n(g; x) - g\|_\rho \\ &\quad + \|f - g\|_\rho \end{aligned} \tag{2.5.16}$$

olarak yazılabilir. (2.5.16) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ifadeleri ayrı ayrı inceleyelim. $L_n : C_\rho(\mathbb{R}) \rightarrow C_\rho(\mathbb{R})$ dönüşüm yapan bir operatör dizisi olduğundan sınırlıdır.

Ayrıca (L_n) operatörler dizisi lineer olduğundan

$$\begin{aligned}\|L_n(f; x) - L_n(g; x)\|_\rho &= \|L_n(f - g; x)\|_\rho \\ &\leq \|L_n(\rho; x)\|_\rho \|f - g\|_\rho\end{aligned}\quad (2.5.17)$$

sağlanır. (2.5.17) eşitsizliğinin sağındaki ifadeleri gözönüne alalım.

$$\begin{aligned}\|L_n(\rho; x)\|_\rho &= \|L_n(1 + \Phi^2; x)\|_\rho \\ &= \|L_n(1; x) + L_n(\Phi^2; x) + 1 + \Phi^2(x) - 1 - \Phi^2(x)\|_\rho \\ &\leq \|L_n(1; x) - 1\|_\rho + \|L_n(\Phi^2; x) - \Phi^2(x)\|_\rho + \|1 + \Phi^2(x)\|_\rho \\ &= \|L_n(1; x) - 1\|_\rho + \|L_n(\Phi^2; x) - \Phi^2(x)\|_\rho + \|\rho\|_\rho\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. (2.5.14) ve $\|\rho\|_\rho = 1$ ifadesi gözönüne alınarak $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}\|L_n(\rho; x)\|_\rho &< \varepsilon + \varepsilon + 1 \\ &= 2\varepsilon + 1\end{aligned}$$

yazılabilir. ε keyfi olduğundan $\varepsilon = 1$ seçilebilir. O halde

$$\|L_n(\rho; x)\|_\rho < 3 \quad (2.5.18)$$

elde edilir. Bu da (L_n) lineer pozitif operatörler dizisinin düzgün sınırlı olduğunu gösterir.

$E = [-x_1, -x_0] \cup [x_0, x_1]$ olmak üzere g fonksiyonunun tanımı gereğince

$$\begin{aligned}\|f - g\|_\rho &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|f(x) - g(x)|}{\rho(x)} \\ &\leq \sup_{|x| \leq x_0} \frac{|f(x) - g(x)|}{\rho(x)} + \sup_{x \in E} \frac{|f(x) - g(x)|}{\rho(x)} + \sup_{|x| > x_1} \frac{|f(x) - g(x)|}{\rho(x)} \\ &= \sup_{|x| \leq x_0} \frac{|f(x) - f(x)|}{\rho(x)} + \sup_{x \in E} \frac{|f(x) - g(x)|}{\rho(x)} + \sup_{|x| > x_1} \frac{|f(x) - 0|}{\rho(x)} \\ &= \sup_{x \in E} \frac{|f(x) - g(x)|}{\rho(x)} + \sup_{|x| > x_1} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{x \in E} \left\{ \frac{|f(x)| + |g(x)|}{\rho(x)} \right\} + \sup_{|x| > x_1} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} \\ &\leq \sup_{x \in E} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} + \sup_{x \in E} \frac{|g(x)|}{\rho(x)} + \sup_{|x| > x_1} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$E \subset |x| \geq x_0 \text{ ve } |x| > x_1 \subset |x| \geq x_0$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \|f - g\|_\rho &\leq \sup_{|x| \geq x_0} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} + \sup_{x \in E} \frac{|g(x)|}{\rho(x)} + \sup_{|x| \geq x_0} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} \\ &= 2 \sup_{|x| \geq x_0} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} + \sup_{x \in E} \frac{|g(x)|}{\rho(x)} \end{aligned}$$

olup,

$$G(x_0) = \max_{x \in E} |g(x)| = \max \{f(x_0), -f(x_0)\}$$

denirse

$$\|f - g\|_\rho \leq 2 \sup_{|x| \geq x_0} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} + G(x_0) \sup_{x \in E} \frac{1}{\rho(x)}$$

elde edilir. $f \in C_\rho^0(\mathbb{R})$ olduğundan

$$\sup_{|x| \geq x_0} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} < \varepsilon$$

gerçeklenir. Ayrıca $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{\rho(x)} < \varepsilon$$

olduğundan $G(x_0)$, ε na bağlı olmak üzere

$$\frac{1}{\rho(x)} < \frac{\varepsilon}{G(x_0)}$$

olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned} \|f - g\|_\rho &\leq 2\varepsilon + G(x_0) \cdot \frac{\varepsilon}{G(x_0)} \\ &= 3\varepsilon \end{aligned} \tag{2.5.19}$$

elde edilir. (2.5.18) ve (2.5.19) ifadeleri (2.5.17) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\|L_n(f; x) - L_n(g; x)\|_{\rho} \leq 9\varepsilon$$

bulunur. g fonksiyonun tanımı gereğince

$$\begin{aligned} \|L_n(g; x) - g(x)\|_{\rho} &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|L_n(g; x) - g(x)|}{\rho(x)} \\ &\leq \sup_{|x| \leq x_1} \frac{|L_n(g; x) - g(x)|}{\rho(x)} + \sup_{|x| > x_1} \frac{|L_n(g; x)|}{\rho(x)} \end{aligned} \quad (2.5.20)$$

olur. Eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk ifade lemma 2.5.1' den $n \rightarrow \infty$ için

$$\sup_{|x| \leq x_1} \frac{|L_n(g; x) - g(x)|}{\rho(x)} \rightarrow 0 \quad (2.5.21)$$

gerçeklenir.

Şimdi de eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci ifadeyi ele alalım.

$$\begin{aligned} \sup_{|x| > x_1} \frac{|L_n(g; x)|}{\rho(x)} &\leq \sup_{|x| > x_1} \frac{L_n(|g|; x)}{\rho(x)} \\ &\leq \sup_{|x| > x_1} \frac{L_n\left(\sup_t |g|; x\right)}{\rho(x)} \\ &= G(x_0) \sup_{|x| > x_1} \frac{L_n(1; x)}{\rho(x)} \\ &= G(x_0) \sup_{|x| > x_1} \frac{L_n(1; x) + 1 - 1}{\rho(x)} \\ &\leq G(x_0) \sup_{|x| > x_1} \frac{|L_n(1; x) - 1|}{\rho(x)} + G(x_0) \sup_{|x| > x_1} \frac{1}{\rho(x)} \\ &< G(x_0) \sup_{|x| > x_1} \frac{|L_n(1; x) - 1|}{\rho(x)} + G(x_0) \frac{\varepsilon}{\rho(x)} \\ &= G(x_0) \sup_{|x| > x_1} \frac{|L_n(1; x) - 1|}{\rho(x)} + \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir.

(2.5.14) ifadesinden dolayı her $\varepsilon > 0$ için

$$\sup_{|x|>x_1} \frac{|L_n(1;x) - 1|}{\rho(x)} < \varepsilon \quad (2.5.22)$$

sağlanır.

(2.5.20), (2.5.21) ve (2.5.22) ifadelerinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(g; x) - g(x)\|_\rho = 0 \quad (2.5.23)$$

bulunur.

(2.5.18), (2.5.19) ve (2.5.20) ifadeleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \|L_n f - f\|_\rho &\leq \|L_n(f - g; x)\|_\rho + \|L_n(g; x) - g\|_\rho + \|g - f\|_\rho \\ &\leq \|f - g\|_\rho \cdot \|L_n\|_\rho + \|L_n(g; x) - g\|_\rho + \|g - f\|_\rho \\ &= \|f - g\|_\rho (\|L_n\|_\rho + 1) + \|L_n(g; x) - g\|_\rho \\ &< 3\varepsilon(3+1) + \varepsilon \\ &= 13\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da (2.5.15) ifadesinin gerçeklendiğini gösterir.

3. BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARI İLE YAKLAŞIM

Chlodowsky (1937) tarafından sınırsız bir aralık üzerinde Bernstein polinomları genelleştirilmiş ve bu polinomların bazı yaklaşım özellikleri araştırılmıştır. Bernstein-Chlodowsky polinomları olarak adlandırılan bu polinomların, Lorentz (1953) Gadzhiev (1995, 1998), Gadzhiev vd. (1999), İbikli (2001), ve bunun gibi birçok kaynakta tanımı ve yaklaşım özellikleri verilmiştir.

Tanım 3.1 (b_n) dizisi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

koşullarını sağlayan monoton artan reel terimli pozitif bir sayı dizisi olmak üzere $0 \leq x \leq b_n$ için

$$C_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}b_n\right) c_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlı polinomlara *Bernstein-Chlodowsky polinomları* adı verilir.

Bu polinomlar dizisinin yakınsaklığını araştıralım.

$f(t) = 1$ olmak üzere

$$C_n(1; x) = \sum_{k=0}^n c_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} = 1 \quad (3.2)$$

şeklindedir.

$f(t) = t$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 C_n(t; x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} b_n c_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
 &= \sum_{k=1}^n b_n \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
 &= x \sum_{k=0}^{n-1} c_{n-1}^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1} \\
 &= x
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

şeklindedir.

$f(t) = t^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 C_n(t^2; x) &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} b_n\right)^2 c_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
 &= \sum_{k=1}^n b_n^2 \frac{k}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
 &= x \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} b_n \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
 &= \frac{b_n}{n} x \sum_{k=2}^n (k-1) \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
 &\quad + \frac{b_n}{n} x \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
 &= \frac{x^2}{n} \sum_{k=2}^n \frac{(n-1)!}{(k-2)! (n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-2} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
 &\quad + \frac{b_n}{n} x \sum_{k=0}^{n-1} c_{n-1}^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1} \\
 &= x^2 \left(\frac{n-1}{n}\right) \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(k-2)! (n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-2} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} + \frac{b_n}{n} x \\
 &= x^2 \left(\frac{n-1}{n}\right) \sum_{k=0}^{n-2} c_{n-2}^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k-2} + \frac{b_n}{n} x \\
 &= x^2 + x \frac{(b_n - x)}{n}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

şeklindedir.

Korovkin teoreminin şartlarını sağlayıp sağlamadığını bakarsak; Korovkin teoreminin birinci ve ikinci koşulları sağlanır. Fakat $n \rightarrow \infty$ için üçüncü koşulu sağlamaz. Dolayısıyla Korovkin teoremi gerçekleşmez. Gerçektende, sınırsız aralık üzerinde $f(x) = x^2 \in C(0, \infty)$ fonksiyonuna (3.1) polinomlar dizisi ile yaklaşım mümkün degildir. Çünkü (3.4) ifadesi gözönüne alındığında

$$\begin{aligned}\|C_n(t^2; x) - x^2\|_{C(0, b_n)} &= \max_{0 \leq x \leq b_n} \left| x^2 + x \frac{(b_n - x)}{n} - x^2 \right| \\ &= \frac{b_n^2}{4n}\end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|C_n(t^2; x) - x^2\|_{C(0, b_n)} = \infty$$

elde edilir. Bu ise yakınsamanın gerçekleşmediğini gösterir.

Aşağıdaki teoremler ile sınırsız aralık üzerinde tanımlanmış fonksiyon uzaylarında (3.1) polinomlar dizisi ile yaklaşım koşulları ortaya koyulmuştur.

Teorem 3.1 $\forall f \in C(0, \infty)$ fonksiyonu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k_f < \infty$$

olma koşulunu ve (b_n) dizisi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n^2}{n} = 0 \tag{3.5}$$

koşulunu sağlaması. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|C_n(f; x) - f(x)\|_{C(0, b_n)} = 0$$

gerçeklenir.

İspat: $k_f = 0$ olması durumunda teoremin ispatını yapmak yeterlidir. Bu durumda $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ olur. Yani; her $\varepsilon > 0$ için $x \geq x_0$ iken $|f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliğini

gerçekleyen en az bir x_0 noktası vardır.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & ; \quad 0 \leq x \leq x_0 \\ \text{lineer} & ; \quad x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{1}{2} \\ 0 & ; \quad x \geq x_0 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

şeklinde sürekli bir g fonksiyonu tanımlayalım. Bu durumda g fonksiyonunun tanımı gereğince

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq x \leq b_n} |f(x) - g(x)| &\leq \sup_{0 \leq x \leq x_0} |f(x) - g(x)| + \sup_{x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{1}{2}} |f(x) - g(x)| \\ &\quad + \sup_{x \geq x_0 + \frac{1}{2}} |f(x) - g(x)| \\ &= \sup_{x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{1}{2}} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \geq x_0 + \frac{1}{2}} |f(x)| \\ &\leq \sup_{x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{1}{2}} |f(x)| + \sup_{x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{1}{2}} |g(x)| + \sup_{x \geq x_0 + \frac{1}{2}} |f(x)| \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Bu eşitsizlikte

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{1}{2}} |g(x)| = |f(x_0)| \text{ ve } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

olduğundan

$$\sup_{0 \leq x \leq b_n} |f(x) - g(x)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq x \leq b_n} |C_n(f; x) - f(x)| &= \sup_{0 \leq x \leq b_n} |C_n(f; x) - C_n(g; x) + C_n(g; x) \\ &\quad - g(x) + g(x) - f(x)| \\ &\leq \sup_{0 \leq x \leq b_n} |C_n(f - g; x)| + \sup_{0 \leq x \leq b_n} |C_n(g; x) - g(x)| \\ &\quad + \sup_{0 \leq x \leq b_n} |g(x) - f(x)| \\ &\leq \sup_{0 \leq x \leq b_n} C_n \left(\sup_{0 \leq t \leq b_n} |f - g|; x \right) + \sup_{0 \leq x \leq b_n} |C_n(g; x) - g(x)| \\ &\quad + \sup_{0 \leq x \leq b_n} |g(x) - f(x)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sup_{0 \leq x \leq b_n} |C_n(f; x) - f(x)| &\leq 3\varepsilon C_n(1; x) + \sup_{0 \leq x \leq b_n} |C_n(g; x) - g(x)| + 3\varepsilon \\ &\leq 6\varepsilon + \sup_{0 \leq x \leq b_n} |C_n(g; x) - g(x)|\end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq b_n} |C_n(f; x) - f(x)| \leq 6\varepsilon + \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq b_n} |C_n(g; x) - g(x)| \quad (3.6)$$

yazılabilir. (3.6) eşitsizliğinde yer alan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq b_n} |C_n(g; x) - g(x)|$$

ifadesini gözönüne alalım.

g fonksiyonu $[x_0 + \frac{1}{2}, b_n]$ aralığında sıfır olduğundan sınırlıdır. Yani; $|g(x)| \leq M$ koşulunu sağlayan $M > 0$ sayısı vardır. Ayrıca kapali ve sınırlı $[0, x_0 + \frac{1}{2}]$ aralığı üzerinde g fonksiyonu düzgün sürekli dir. O halde düzgün süreklilik tanımı gereğince; her $\varepsilon > 0$ için $\left| \frac{k}{n}b_n - x \right| < \delta$ iken $x \in [0, b_n]$ için

$$\left| g\left(\frac{k}{n}b_n\right) - g(x) \right| < \varepsilon \quad (3.7)$$

gerçekleyen en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

$\left| \frac{k}{n}b_n - x \right| \geq \delta$ olduğunda g fonksiyonu sınırlı olduğundan

$$\left| g\left(\frac{k}{n}b_n\right) - g(x) \right| \leq 2M$$

gerçeklenir. Ayrıca

$$\frac{\left(\frac{k}{n}b_n - x \right)^2}{\delta^2} \geq 1 \implies \frac{2M \left(\frac{k}{n}b_n - x \right)^2}{\delta^2} \geq 2M$$

yazılabileceğinden

$$\left| g\left(\frac{k}{n}b_n\right) - g(x) \right| \leq \frac{2M \left(\frac{k}{n}b_n - x \right)^2}{\delta^2} \quad (3.8)$$

elde edilir. (3.7) ve (3.8) eşitsizliklerinden

$$\left| g\left(\frac{k}{n}b_n\right) - g(x) \right| \leq \varepsilon + \frac{2M \left(\frac{k}{n}b_n - x \right)^2}{\delta^2}$$

gerçeklenir. Buradan

$$\begin{aligned} |C_n(g; x) - g(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n g\left(\frac{k}{n}b_n\right) c_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^n g(x) c_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left| g\left(\frac{k}{n}b_n\right) - g(x) \right| c_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\ &\leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}b_n - x \right)^2 c_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\ &= \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}b_n \right)^2 c_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\ &\quad - 2x \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} b_n c_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} + \frac{2M}{\delta^2} x^2 \\ &= \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \left[x^2 + \frac{x(b_n - x)}{n} - 2x^2 + x^2 \right] \\ &= \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \frac{x(b_n - x)}{n} \end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq x \leq b_n} |C_n(g; x) - g(x)| &\leq \varepsilon + \max_{0 \leq x \leq b_n} \frac{2M}{\delta^2} \frac{x(b_n - x)}{n} \\ &\leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \frac{b_n^2}{4n} \end{aligned}$$

elde edilir. (b_n) dizisi (3.5) koşulunu sağladığından

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq b_n} |C_n(g; x) - g(x)| &\leq \varepsilon + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2M}{\delta^2} \frac{b_n^2}{4n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur.

Bu ifade (3.6) ifadesinde gözönüne alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq b_n} |C_n(f; x) - f(x)| = 0$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

$$L_n(f; x) = \begin{cases} C_n(f; x) & ; \quad 0 \leq x \leq b_n \\ f(x) & ; \quad x \notin [0, b_n] \end{cases}$$

şeklinde tanımlı operatörler dizisine Teorem 2.5.3 uygulanırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.2 $\rho(x) = 1 + x^2$ olmak üzere $\forall f \in C_\rho^k(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|C_n(f; x) - f(x)\|_\rho = 0 \quad (3.9)$$

gerçeklenir.

İspat: (3.2), (3.3) ve (3.4) ifadeleri Teorem 2.5.3'ün koşullarını sağlamalıdır.

$0 \leq x \leq b_n$ için (3.2) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \|L_n(1; x) - 1\|_\rho &= \sup_{0 \leq x \leq b_n} \frac{|C_n(1; x) - 1|}{\rho(x)} \\ &= \sup_{0 \leq x \leq b_n} \frac{|1 - 1|}{\rho(x)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(1; x) - 1\|_\rho = 0$$

bulunur.

(3.3) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\|L_n(t; x) - x\|_\rho &= \sup_{0 \leq x \leq b_n} \frac{|C_n(t; x) - x|}{\rho(x)} \\ &= \sup_{0 \leq x \leq b_n} \frac{|x - x|}{1 + x^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir ve buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t; x) - x\|_\rho = 0$$

bulunur. (3.4) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\|L_n(t^2; x) - x^2\|_\rho &= \sup_{0 \leq x \leq b_n} \frac{|C_n(t^2; x) - x^2|}{\rho(x)} \\ &= \sup_{0 \leq x \leq b_n} \frac{\left|x^2 + \frac{x(b_n - x)}{n} - x^2\right|}{1 + x^2} \\ &\leq \frac{1}{n} \sup_{0 \leq x \leq b_n} (b_n - x) \\ &= \frac{b_n}{n}\end{aligned}$$

bulunur. Bernstein-Chlodowsky polinomlarının tanımında kullanılan (b_n) pozitif sayı dizisi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$ olma koşulunu sağladığından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t^2; x) - x^2\|_\rho = 0$$

elde edilir. Bu durumda Teorem 2.5.3 gereğince;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n f - f\|_\rho = 0$$

sağlanır. (L_n) lineer pozitif operatörler dizisinin tanımından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|C_n f - f\|_\rho = 0$$

gerçeklenir. Bu da ispatı tamamlar.

Theorem 3.3 f fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında

$$|f(x)| \leq M_f (1 + x^2) \quad (3.10)$$

koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda keyfi $A > 0$ ve $x \in [0, A]$ için,

$$|C_n(f; x) - f(x)| \leq R\omega_{1+A} \left(\sqrt{\frac{b_n}{n}} \right)$$

eşitsizliği sağlanır.

Burada M_f , f fonksiyonuna bağlı, R , n 'den bağımsız bir sabittir. ω_{1+A} ise f fonksiyonunun $[0, 1+A]$ aralığındaki süreklilik modülüdür.

İspat: $A > 0$ ve $x \in [0, A]$ için aşağıdaki iki nokta cümlesini tanımlayalım.

$$E' = \left\{ k : \frac{k}{n} b_n \geq 1 + A \right\}$$

$$E'' = \left\{ k : \frac{k}{n} b_n \leq 1 + A \right\}$$

(3.2) eşitliğinden dolayı

$$\begin{aligned} |C_n(f; x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n \left[f\left(\frac{k}{n} b_n\right) - f(x) \right] c_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k \in E'} \left| f\left(\frac{k}{n} b_n\right) - f(x) \right| c_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\ &\quad + \sum_{k \in E''} \left| f\left(\frac{k}{n} b_n\right) - f(x) \right| c_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\ &= I' + I'' \end{aligned} \quad (3.11)$$

bulunur.

I' ifadesini hesaplayalım. f fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında sürekli bir fonksiyon olduğundan $R_1 \geq 1$ sayısı vardır öyle ki $x \in [0, A]$ için

$$|f(x)| \leq R_1$$

eşitsizliği sağlanır. (3.10) ifadesi gereğince $R_2 \geq 1$ sayısı vardır öyle ki

$$\left| f\left(\frac{k}{n}b_n\right) \right| \leq R_2 \left[1 + \left(\frac{k}{n}b_n \right)^2 \right]$$

gerçeklenir.

Bu iki eşitsizlik kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left| f\left(\frac{k}{n}b_n\right) - f(x) \right| &\leq \left| f\left(\frac{k}{n}b_n\right) \right| + |f(x)| \\ &\leq R_3 \left[2 + \left(\frac{k}{n}b_n \right)^2 \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $R_3 = \max\{R_1, R_2\}$ şeklinde alınmıştır.

$k \in E'$ ve $x \in [0, A]$ için

$$\left| \frac{k}{n}b_n - x \right| \geq 1$$

olup bundan dolayı

$$\begin{aligned} \left| f\left(\frac{k}{n}b_n\right) - f(x) \right| &\leq R_3 \left[\frac{k}{n}b_n - x \right]^2 (4 + 4x + x^2) \\ &\leq R_3 \left[\frac{k}{n}b_n - x \right]^2 (A + 2)^2 \\ &= R_4 \left[\frac{k}{n}b_n - x \right]^2 \end{aligned} \tag{3.12}$$

elde edilir. Burada $R_4 = R_3(A + 2)^2$ dir.

(3.2) , (3.3) ve (3.4) ifadeleri kullanırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} b_n - x \right)^2 c_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n} \right)^{n-k} \\
& = \sum_{k=0}^n \left[\left(\frac{k}{n} b_n - x \right)^2 = \left(\frac{k}{n} b_n \right)^2 - 2x \frac{k}{n} b_n + x^2 \right] c_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n} \right)^{n-k} \\
& = B_n(t^2; x) - 2xB_n(t; x) + x^2 B_n(1; x) \\
& = x^2 + x \frac{(b_n - x)}{n} - 2x^2 + x^2 \\
& = x \frac{(b_n - x)}{n}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

bulunur. (3.12) ve (3.13) den yararlanarak

$$\begin{aligned}
I' & \leq R_4 \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} b_n - x \right)^2 c_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n} \right)^{n-k} \\
& = R_4 x \frac{(b_n - x)}{n} \\
& \leq R_4 \frac{Ab_n}{n}
\end{aligned}$$

elde edilir. $R_5 = R_4 A$ denildiği takdirde

$$I' \leq R_5 \frac{b_n}{n} \tag{3.14}$$

olur.

Şimdi de I'' ifadesini hesaplayalım.

$\omega(f; \delta)$ tanımından görülüyor ki f fonksiyonu $[0, A]$ aralığında sınırlı olduğundan her $x, t \in [0, A]$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|)$$

gerçeklenir. Özellik 2.2.4' den

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x)| &\leq \omega\left(f; |t-x| \frac{\delta}{\delta}\right) \\ &\leq \left[\frac{|t-x|}{\delta} + 1 \right] \omega(f; \delta) \end{aligned} \quad (3.15)$$

elde edilir. (3.15) ifadesi kullanırsa

$$\begin{aligned} I'' &= \sum_{k \in E''}^n \left| f\left(\frac{k}{n} b_n\right) - f(x) \right| c_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\ &\leq \sum_{k=0}^n \omega_{1+A} \left(f; \left| \frac{k}{n} b_n - x \right| \right) c_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left(\frac{\left| \frac{k}{n} b_n - x \right|}{\delta_n} + 1 \right) \omega_{1+A}(f; \delta_n) c_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\ &\leq \omega_{1+A}(f; \delta_n) \left\{ \frac{1}{\delta_n} \sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} b_n - x \right| c_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} + 1 \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Burada δ_n , n' ye bağlı bir dizidir. Şimdi bu δ_n dizisini uygun biçimde bulalım. Son ifadeye Cauchy-Schwartz-Bunyakovsky eşitsizliği uygulanır ve (3.13) eşitliği kullanırsak

$$\begin{aligned} I'' &\leq \omega_{1+A}(f; \delta_n) \\ &\times \left\{ \frac{1}{\delta_n} \sqrt{\sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} b_n - x \right|^2 c_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}} \right. \\ &\times \left. \sqrt{\sum_{k=0}^n c_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}} + 1 \right\} \\ &= \omega_{1+A}(f; \delta_n) \left\{ \frac{1}{\delta_n} \sqrt{\sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} b_n - x \right|^2 c_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}} + 1 \right\} \\ &= \omega_{1+A}(\delta_n) \left\{ \frac{1}{\delta_n} \frac{\sqrt{x(b_n - x)}}{\sqrt{n}} + 1 \right\} \end{aligned}$$

elde edilir.

$x \in [0, A]$ için $x(b_n - x) \leq b_n A$ dir. Özel olarak $\delta_n = \sqrt{\frac{b_n}{n}}$ alırsa

$$\begin{aligned} I'' &\leq \omega_{1+A} \left(\sqrt{\frac{b_n}{n}} \right) \left\{ \frac{1}{\sqrt{\frac{b_n}{n}}} \frac{\sqrt{b_n A}}{\sqrt{n}} + 1 \right\} \\ &= \omega_{1+A} \left(\sqrt{\frac{b_n}{n}} \right) (1 + \sqrt{A}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

elde edilir. (3.14) ve (3.16) ifadelerinin (3.11) ifadesinde yerine yazılmasıyla,

$$R_6 = \max \left\{ R_5, 1 + \sqrt{A} \right\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} |C_n(f; x) - f(x)| &\leq R_5 \frac{b_n}{n} + \omega_{1+A} \left(\sqrt{\frac{b_n}{n}} \right) (1 + \sqrt{A}) \\ &\leq R_6 \left\{ \omega_{1+A} \left(\sqrt{\frac{b_n}{n}} \right) + \frac{b_n}{n} \right\} \end{aligned}$$

bulunur. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$ olduğundan, yeterince büyük n 'ler için $\frac{b_n}{n} \leq \sqrt{\frac{b_n}{n}}$ dir. Ayrıca, δ_n dizisi sıfıra yakınsayan bir dizi olduğundan

$$\omega(f; \delta_n) \geq C_f \delta_n$$

sağlanır. Burada C_f , f fonksiyonuna bağlı sabit sayıdır. Buna göre

$$C_f \sqrt{\frac{b_n}{n}} \leq \omega_{1+A} \left(\sqrt{\frac{b_n}{n}} \right)$$

yazılabilir. Bundan dolayı

$$R = R_6 \left(1 + \frac{1}{C_f} \right)$$

olmak üzere

$$|C_n(f; x) - f(x)| \leq R \omega_{1+A} \left(\sqrt{\frac{b_n}{n}} \right)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

4. BAZI KONVOLÜSYON TİPLİ OPERATÖRLER İLE YAKLAŞIM

f fonksiyonu r -kez türevlenebilir ve r -inci türevi sürekli ise bu durumda türev özelliklerinin de kullanılabileceği Taylor polinomları göz önüne alınabilir. Bu durumda iki operatörün konvolüsyonu olan, Bernstein-Taylor polinomları ve Chlodowsky-Taylor polinomları tanımlanabilir.

Bu bölümde Bernstein-Taylor ve Chlodowsky-Taylor polinomlarının f fonksiyonuna yaklaşım ve yaklaşım hızı incelenecaktır.

4.1 Bernstein-Taylor Polinomlarıyla Yaklaşım

G.H. Kirov (1992) tarafından Bernstein-Taylor polinomları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 4.1.1 $x \in [0, 1]$ olmak üzere

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \varphi_n^k(x) \quad (4.1.1)$$

şeklinde tanımlanan polinomlara Bernstein Polinomları adı verilir.

Burada $\varphi_n^k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ dir.

f fonksiyonu $C[0, 1]$ uzayında r -kez türevlenebilir ve r -inci türevi sürekli olmak üzere

$$T_r(x) = \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}(c)}{i!} (x - c)^i \quad (4.1.2)$$

şeklinde tanımlanan polinoma $C[0, 1]$ uzayında f fonksiyonu için r -inci derecede Taylor Polinomu adı verilir.

(4.1.1) ve (4.1.2) operatörlerinin konvoltüsyonu olan

$$\begin{aligned}
 B_{n,r}(f; x) & : = (B_n * T_r)(f; x) \\
 & = \sum_{k=0}^n T_r\left(f; \frac{k}{n}\right)^i \varphi_n^k(x) \\
 & = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}\right)^i \varphi_n^k(x)
 \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

operatörüne *Bernstein-Taylor Polinomu* denir.

$r = 0$ alırsak

$$B_{n,0}(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) c_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

elde edilir. Bu ise Bernstein polinomudur. Yani

$$B_{n,0}(f; x) = B_n(f; x)$$

gerçeklenir.

Şimdi Bernstein-Taylor polinomunun f fonksiyonuna yaklaşımını incelerken kullanacağımız bazı lemmalar verelim. (Hrushikesh N. Mhaskar, Devidas V. Pai, Fundamentals of Theory, Lorentz, Bernstein Polynomials ve Natanson, Constructive Function Theory.)

Lemma 4.1.1

$$\varphi_n^k(x) = c_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

olmak üzere

$$S_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^n (k-nx)^r \varphi_n^k(x) \tag{4.1.4}$$

şeklinde tanımlansın. Her $x \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

a) $S_{n,0}(x) = 1$

b) $S_{n,1}(x) = 0$

c) $S_{n,2}(x) = nx(1-x)$

d) $S_{n,r+1}(x) = x(1-x)[S'_{n,r}(x) + nrS_{n,r-1}(x)] ; r \geq 1$

e) $S_{n,4}(x) = 3n^2X^2 - 2nX^2 + nX(1-2x)^2 ; X := x(1-x)$

İspat

a) $r = 0$ için

$$S_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^n \varphi_n^k(x)$$

olup, (2.4.2) ifadesinden

$$S_{n,0}(x) = 1$$

bulunur.

b) $r = 1$ için

$$\begin{aligned} S_{n,1}(x) &= \sum_{k=0}^n (k-nx) \varphi_n^k(x) \\ &= \sum_{k=0}^n k \varphi_n^k(x) - nx \sum_{k=0}^n \varphi_n^k(x) \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k \varphi_n^k(x) &= \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= nx \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &= nx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} x^k (1-x)^{n-1-k} \\ &= nx \sum_{k=0}^n \varphi_{n-1}^k(x) \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

dir. (2.4.2) ve (4.1.6) ifadelerini (4.1.5) de kullanılırsa

$$S_{n,1}(x) = 0$$

elde edilir.

c) $r = 2$ için

$$\begin{aligned} S_{n,2}(x) &= \sum_{k=0}^n (k - nx)^2 \varphi_n^k(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \{k^2 - 2knx + (nx)^2\} \varphi_n^k(x) \\ &= \sum_{k=0}^n k^2 \varphi_n^k(x) - 2nx \sum_{k=0}^n k \varphi_n^k(x) + (nx)^2 \sum_{k=0}^n \varphi_n^k(x) \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 \varphi_n^k(x) &= \sum_{k=1}^n k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= nx \sum_{k=1}^n k \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &= nx \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} x^k (1-x)^{n-1-k} \\ &= nx \sum_{k=0}^{n-1} k \varphi_n^k(x) + nx \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_n^k(x) \end{aligned}$$

(2.4.2) ve (4.1.6) ifadelerinden

$$\sum_{k=1}^n k^2 \varphi_n^k(x) = (nx)^2 - nx^2 + nx \quad (4.1.8)$$

bulunur. (2.4.2) , (4.1.6) ve (4.1.8) ifadeleri (4.1.7) de yerlerine yazılırsa

$$S_{n,2}(x) = nx(1-x)$$

elde edilir.

d) İndirgeme formülü;

$$\varphi_n^k(x) = \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}$$

ifadesinin x değişkenine göre türevi

$$(\varphi_n^k(x))' = \frac{\varphi_n^k(x)}{x(1-x)} (k-nx) \quad (4.1.9)$$

dır.

$$S_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^n (k-nx)^r \varphi_n^k(x)$$

ifadesinin x değişkenine göre türevi

$$(S_{n,r}(x))' = -nr \sum_{k=0}^n (k-nx)^{r-1} \varphi_n^k(x) + \sum_{k=0}^n (k-nx)^r (\varphi_n^k(x))'$$

dır. (4.1.9) eşitliğinden

$$(S_{n,r}(x))' = -nrS_{n,r-1}(x) + \frac{1}{x(1-x)} S_{n,r+1}(x)$$

bulunur. Buradan

$$S_{n,r+1}(x) = x(1-x) \left[S_{n,r}'(x) + nrS_{n,r-1}(x) \right]$$

elde edilir.

e) (a), (b), (c) ve (d) şıklarından

$$S_{n,3}(x) = nX(1-2x)$$

$$S_{n,4}(x) = 3n^2X^2 - 2nX^2 + nX(1-2x)^2$$

elde edilir.

Lemma 4.1.2 $A_{r,i}(x)$ n'den bağımsız polinomlar olmak üzere (4.1.4) ifadesindeki fonksiyon

$$S_{n,r}(x) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]} A_{r,i}(x) n^i \quad (4.1.10)$$

biçiminde gösterilebilir.

İspat: Tümevarım yöntemi kullanılsrsa;

$r = 1$ için

$$S_{n,1}(x) = A_{1,0}(x)$$

dir. $A_{1,0}(x) = 0$ alınırsa $r = 1$ için (4.1.10) ifadesi gerçekleşir.

$r = t$ için

$$S_{n,t}(x) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{2}\right]} A_{t,i}(x) n^i$$

ifadesi gerçeklensin.

$r = t + 1$ için

$$\begin{aligned} S_{n,t+1}(x) &= x(1-x) \left[S'_{t,r}(x) + ntS_{n,t-1}(x) \right] \\ &= x(1-x) \left[\sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{2}\right]} A'_{t,i}(x) n^i + nt \sum_{i=0}^{\left[\frac{t-1}{2}\right]} A_{t-1,i}(x) n^i \right] \end{aligned}$$

dir.

$$1 + \left[\left| \frac{t-1}{2} \right| \right] = \left[\left| \frac{t+1}{2} \right| \right]$$

olduğu dikkate alınırsa

$$S_{n,t+1}(x) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{t+1}{2}\right]} A_{t+1,i}(x) n^i$$

gerçeklenir. Bu da ispatı tamamlar.

$S_{n,r}(x)$ fonksiyonlarına x ve n' ye göre bir polinom gibi bakabiliriz. $S_{n,r}(x)$ n' ye göre $\left[\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor\right]$ -inci dereceden bir polinomdur. Buna göre $x \in [0, 1]$ noktaları için

$$|S_{n,r}(x)| \leq K(r) n^{\left[\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor\right]} \quad (4.1.11)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $K(r)$ sayısı vardır.

Teorem 4.1.1 $f \in C^r[0, 1]$ ($r = 0, 1, 2, \dots$) ise $[0, 1]$ aralığı tüberinde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_{n,r}(f; x) = f(x)$$

düzungün olarak gerçekleşir.

İspat: $B_{n,r}(f; x)$ lineer pozitif bir operatördür.

Şimdi Korovkin teoreminin koşullarını araştıralım.

$$B_{n,r}(1; x) = \sum_{k=0}^n \varphi_n^k(x) = 1$$

$$\begin{aligned} B_{n,r}(t; x) &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^1 \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}\right)^i \varphi_n^k(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \left[\frac{k}{n} + 1 \left(x - \frac{k}{n} \right) \right] \varphi_n^k(x) \\ &= x \sum_{k=0}^n \varphi_n^k(x) \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{n,r}(t^2; x) &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^2 \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}\right)^i \varphi_n^k(x) \\
&= \sum_{k=0}^n \left\{ \left(\frac{k}{n}\right)^2 + \frac{2}{1!} \left(\frac{k}{n}\right) \left(x - \frac{k}{n}\right) + \frac{2}{2!} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \right\} \varphi_n^k(x) \\
&= x^2 \sum_{k=0}^n \varphi_n^k(x) \\
&= x^2
\end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ için

$$\|B_{n,r}(1; x) - 1\|_{C[0,1]} \rightrightarrows 0$$

$$\|B_{n,r}(t; x) - x\|_{C[0,1]} \rightrightarrows 0$$

$$\|B_{n,r}(t^2; x) - x^2\|_{C[0,1]} \rightrightarrows 0$$

sağlanır. Korovkin teoremine göre $f \in C^r[0, 1]$ için

$$\|B_{n,r}(f; x) - f(x)\|_{C[0,1]} \rightrightarrows 0$$

gerçeklenir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.2 (Popoviciu) $B_n(f; x)$ Bernstein polinomu olmak üzere $[0, 1]$ aralığında sürekli f fonksiyonu için

$$|B_n(f; x) - f(x)| \leq \frac{3}{2} \omega_f\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$$

dir.

Teorem 4.1.3 $r = 0, 1, 2, \dots$ için $f \in C^r[0, 1]$ ve $x \in [0, 1]$ olmak üzere

$$\|B_{n,r}(f; x) - f(x)\|_{C[0,1]} \leq K(r) n^{-\frac{r}{2}} \omega_{f(r)}\left(n^{-\frac{1}{2}}\right) \quad (4.1.12)$$

gerçeklenir (Kirov 1992).

İspat: $r = 0$ için $B_{n,0}(f; x) = B_n(f; x)$ dir. Dolayısıyla Teorem 4.1.2' den

$$\|B_{n,0}(f; x) - f(x)\|_{C[0,1]} \leq \frac{3}{2}\omega_f\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$$

olduğunu gösterebiliriz. Yani $r = 0$ için (4.1.12) ifadesi gerçekleşir.

Şimdi de $r = 1, 2, 3, \dots$ için ispatını yapalım.

(2.4.2) ifadesinden

$$\begin{aligned} |f(x) - B_{n,r}(f; x)| &= \left| f(x) \sum_{k=0}^n \varphi_n^k(x) - \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}\right)^i \varphi_n^k(x) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n f(x) \varphi_n^k(x) - \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}\right)^i \varphi_n^k(x) \right| \end{aligned}$$

yazılabilir.

Modified Taylor formülü uygulanırsa

$$\begin{aligned} &|f(x) - B_{n,r}(f; x)| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n \left\{ \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}\right)^i \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\left(x - \frac{k}{n}\right)^n}{(r-1)!} \int_0^1 (1-t)^{r-1} \left[f^{(r)}\left(\frac{k}{n} + t(x - \frac{k}{n})\right) - f^{(r)}\left(\frac{k}{n}\right) \right] dt \right\} \varphi_n^k(x) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}\right)^i \varphi_n^k(x) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n \frac{\left(x - \frac{k}{n}\right)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (1-t)^{r-1} \left[f^{(r)}\left(\frac{k}{n} + t(x - \frac{k}{n})\right) - f^{(r)}\left(\frac{k}{n}\right) \right] dt \varphi_n^k(x) \right| \end{aligned}$$

elde edilir.

Üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |f(x) - B_{n,r}(f; x)| &\leq \sum_{k=0}^n \left\{ \varphi_n^k(x) \frac{|x - \frac{k}{n}|^r}{(r-1)!} \right. \\ &\quad \times \left. \int_0^1 (1-t)^{r-1} \left| f^{(r)} \left(\frac{k}{n} + t(x - \frac{k}{n}) \right) - f^{(r)} \left(\frac{k}{n} \right) \right| dt \right\} \end{aligned}$$

dir. Lemma 2.2.3' den

$$|f(x) - B_{n,r}(f; x)| \leq \sum_{k=0}^n \frac{|x - \frac{k}{n}|^r}{(r-1)!} \int_0^1 (1-t)^{r-1} \omega_{f^{(r)}} \left(t \left| x - \frac{k}{n} \right| \right) dt \varphi_n^k(x) \quad (4.1.13)$$

elde edilir. Lemma 2.2.5' den

$$\begin{aligned} \omega_{f^{(r)}} \left(t \left| x - \frac{k}{n} \right| \right) &= \omega_{f^{(r)}} \left(t \left| x - \frac{k}{n} \right| n^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\leq \left(t \left| x - \frac{k}{n} \right| n^{\frac{1}{2}} + 1 \right) \omega_{f^{(r)}} \left(n^{-\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizlik (4.1.13) ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} |f(x) - B_{n,r}(f; x)| &\leq \sum_{k=0}^n \left\{ \varphi_n^k(x) \frac{|x - \frac{k}{n}|^r}{(r-1)!} \right. \\ &\quad \times \left. \int_0^1 (1-t)^{r-1} \left(t \left| x - \frac{k}{n} \right| n^{\frac{1}{2}} + 1 \right) \omega_{f^{(r)}} \left(n^{-\frac{1}{2}} \right) dt \right\} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{|x - \frac{k}{n}|^r}{(r-1)!} \omega_{f^{(r)}} \left(n^{-\frac{1}{2}} \right) \left\{ \left| x - \frac{k}{n} \right| n^{\frac{1}{2}} \int_0^1 t (1-t)^{r-1} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 (1-t)^{r-1} dt \right\} \varphi_n^k(x) \\ &= \omega_{f^{(r)}} \left(n^{-\frac{1}{2}} \right) \left\{ \frac{1}{(r+1)!} n^{-r-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^n |k - nx|^{r+1} \varphi_n^k(x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r!} n^{-r} \sum_{k=0}^n |k - nx|^r \varphi_n^k(x) \right\} \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}\psi_{n,r}(x) &= \frac{1}{(r+1)!} n^{-r-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^n |k-nx|^{r+1} \varphi_n^k(x) \\ &\quad + \frac{1}{r!} n^{-r} \sum_{k=0}^n |k-nx|^r \varphi_n^k(x)\end{aligned}$$

denilirse

$$|f(x) - B_{n,r}(f; x)| \leq \psi_{n,r}(x) \omega_{f(r)}\left(n^{-\frac{1}{2}}\right) \quad (4.1.14)$$

olur.

Cauchy-Schwartz-Bunyakovsky eşitsizliği ve (2.4.2) ifadesinden

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n |k-nx|^{r+1} \varphi_n^k(x) &= \sum_{k=0}^n |k-nx|^{r+1} (\varphi_n^k(x))^{\frac{1}{2}} (\varphi_n^k(x))^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left\{ \sum_{k=0}^n |k-nx|^{2(r+1)} \varphi_n^k(x) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=0}^n \varphi_n^k(x) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^n |k-nx|^{2(r+1)} \varphi_n^k(x) \right\}^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

elde edilir.

(4.1.4) ifadesi kullanırsa

$$\sum_{k=0}^n |k-nx|^{r+1} \varphi_n^k(x) \leq \{S_{2r+2}(x)\}^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\sum_{k=0}^n |k-nx|^r \varphi_n^k(x) \leq \{S_{2r}(x)\}^{\frac{1}{2}}$$

bulunur.

Diğer taraftan (4.1.11)' den

$$\{S_{2r+2}(x)\}^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{A(2r+2)n^{r+1}} \quad (4.1.15)$$

$$\{S_{2r}(x)\}^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{A(2r)n^r} \quad (4.1.16)$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.1.15) ve (4.1.6) ifadelerinden

$$\psi_{n,r}(x) \leq n^{\frac{-r}{2}} \left\{ \frac{1}{(r+1)!} \sqrt{A(2r+2)} + \frac{1}{r!} \sqrt{A(2r)} \right\}$$

bulunur.

$$K(r) = \frac{1}{(r+1)!} \sqrt{A(2r+2)} + \frac{1}{r!} \sqrt{A(2r)}$$

denilirse

$$\psi_{n,r}(x) \leq n^{\frac{-r}{2}} K(r)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik (4.1.14) ifadesinde kullanılırsa

$$|f(x) - B_{n,r}(f; x)| \leq n^{\frac{-r}{2}} K(r) \omega_{f(r)} \left(n^{-\frac{1}{2}} \right)$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

4.2 Chlodowsky-Taylor Polinomlarıyla Yaklaşım

A. İzgi, İ. Büyükyazıcı, E. İbikli (2009) tarafından Chlodowsky-Taylor polinomları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 4.2.1 (b_n) dizisi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

koşullarını sağlayan monoton artan reel terimli pozitif bir sayı dizisi olmak üzere $0 \leq x \leq b_n$ için

$$C_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}b_n\right) \varphi_n^k(x) \quad (4.2.1)$$

şeklinde tanımlı polinomlara *Chlodowsky polinomları* adı verilir. Burada $\varphi_n^k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ dir.

f fonksiyonu $C(0, \infty)$ uzayında r-kez türevlenebilir ve r-inci türevi sürekli olmak üzere

$$T_r(x) := \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}(c)}{i!} (x-c)^i \quad (4.2.2)$$

şeklinde tanımlanan polinoma $C(0, \infty)$ uzayında f fonksiyonu için r-inci derecede *Taylor Polinomu* denir.

(4.2.1) ve (4.2.2) nin konvolüsyonu olan

$$\begin{aligned} C_{n,r}(f; x) &: = (C_n * T_r)(f; x) \\ &= \sum_{k=0}^n T_r\left(f; \frac{k}{n} b_n\right)^i \varphi_n^k(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n} b_n\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n} b_n\right)^i \varphi_n^k(x) \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

polinomuna *Chlodowsky-Taylor Polinomu* denir.

$C_{n,r}(f; x)$ lineer pozitif operatördür.

Bu polinomlar dizisinin yakınsaklığını araştıralım.

$f(x) = 1$ için

$$C_{n,r}(1; x) = \sum_{k=0}^n \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) = 1 \quad (4.2.4)$$

şeklindedir.

$f(x) = x$ için

$$\begin{aligned}
 C_{n,r}(t; x) &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^1 \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}b_n\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^i \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \\
 &= \sum_{k=0}^n \left\{ \frac{k}{n}b_n + \left(x - \frac{k}{n}b_n\right) \right\} \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \\
 &= x \sum_{k=0}^n \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \\
 &= x
 \end{aligned}$$

şeklindedir.

$f(x) = x^2$ için

$$\begin{aligned}
 C_{n,r}(t^2; x) &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^2 \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}b_n\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^i \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \\
 &= \sum_{k=0}^n \left\{ \frac{\left(\frac{k}{n}b_n\right)^2}{0!} + \frac{2}{1!} \frac{k}{n}b_n \left(x - \frac{k}{n}b_n\right) + \frac{2}{2!} \left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^2 \right\} \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \\
 &= x^2 \sum_{k=0}^n \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \\
 &= x^2
 \end{aligned}$$

şeklindedir.

Buradan da $n \rightarrow \infty$ için

$$\|C_{n,r}(1; x) - 1\|_\rho \rightrightarrows 0$$

$$\|C_{n,r}(t; x) - x\|_\rho \rightrightarrows 0$$

$$\|C_{n,r}(t^2; x) - x^2\|_\rho \rightrightarrows 0$$

elde edilir.

Teorem 2.5.3, $C_{n,r}(f; x)$ Chlodowsky-Taylor polinomları için uygulanırsa aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.2.1 $C_{n,r} : C_\rho(\mathbb{R}) \rightarrow B_\rho(\mathbb{R})$ lineer pozitif operatörler dizisi

$$\|C_{n,r}(1; x) - 1\|_\rho \rightrightarrows 0$$

$$\|C_{n,r}(t; x) - x\|_\rho \rightrightarrows 0$$

$$\|C_{n,r}(t^2; x) - x^2\|_\rho \rightrightarrows 0$$

koşullarını sağlıyorsa keyfi $f \in C_\rho^k(\mathbb{R})$ için

$$\|C_{n,r}(f; x) - f(x)\|_\rho \rightrightarrows 0$$

gerçeklenir.

Teorem 4.2.2 $f \in C^{(r)}(0, \infty)$ ve $f^{(r)} \in C_\rho^k(\mathbb{R})$ olmak üzere herhangi bir $A \in \mathbb{R}^+$ sayısı ve $x \in [0, A]$ için

$$\|C_{n,r}(f; x) - f(x)\|_{C[0,A]} \leq D_r(A) \left(\frac{b_n}{n} \right)^{\frac{r}{2}} \omega_{1+A} \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada D_r , A ve r' ye bağlı bir sabittir.

İspat:

$$I_{n,r}^k = \int_0^1 (1-u)^{r-1} \left[f^{(r)} \left(\frac{k}{n} b_n + u \left(x - \frac{k}{n} b_n \right) \right) - f^{(r)} \left(\frac{k}{n} b_n \right) \right] du$$

diyelim. Modified Taylor formülü ve (2.4.2) eşitliğinden

$$\begin{aligned} & |C_{n,r}(f; x) - f(x)| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)} \left(\frac{k}{n} b_n \right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n} b_n \right)^i \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) - \sum_{k=0}^n f(x) \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \right| \end{aligned}$$

$$|C_{n,r}(f; x) - f(x)|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}b_n\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^i \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=0}^n \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \left\{ \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}b_n\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^i + \frac{\left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^r}{(r-1)!} I_{n,r}^k \right\} \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^n \frac{\left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^r}{(r-1)!} I_{n,r}^k \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^n \frac{\left|x - \frac{k}{n}b_n\right|^r}{(r-1)!} |I_{n,r}^k| \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi $A > 0$ ve $x \in [0, A]$ için aşağıdaki iki nokta cümlesini tanımlayalım.

$$E_1 = \left\{ k : \frac{k}{n}b_n \geq 1 + A \right\}$$

$$E_2 = \left\{ k : \frac{k}{n}b_n \leq 1 + A \right\}$$

Yukarıdaki eşitsizlikten

$$\begin{aligned}
|C_{n,r}(f; x) - f(x)| &\leq \sum_{k \in E_1}^n \frac{\left|x - \frac{k}{n}b_n\right|^r}{(r-1)!} |I_{n,r}^k| \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \\
&\quad + \sum_{k \in E_2}^n \frac{\left|x - \frac{k}{n}b_n\right|^r}{(r-1)!} |I_{n,r}^k| \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \\
&= J_{n1}(x) + J_{n2}(x) \tag{4.2.5}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$J_{n1}(x)$ ifadesini ele alalım.

$f^{(r)} \in C_\rho^k(\mathbb{R})$ olduğundan $D_1 \geq 1$ sayısı vardır öyle ki

$$f^{(r)}(t) \leq D_1 \rho(t) \tag{4.2.6}$$

dir. Ayrıca $k \in E_1$ ve $x \in [0, A]$ için

$$\left| x - \frac{k}{n} b_n \right| \geq 1 \quad (4.2.7)$$

dir. (4.2.6) ve (4.2.7) ifadelerinden

$$\begin{aligned} & \left| f^{(r)} \left(\frac{k}{n} b_n + u \left(x - \frac{k}{n} b_n \right) \right) - f^{(r)} \left(\frac{k}{n} b_n \right) \right| \\ & \leq \left| f^{(r)} \left(\frac{k}{n} b_n + u \left(x - \frac{k}{n} b_n \right) \right) \right| + \left| f^{(r)} \left(\frac{k}{n} b_n \right) \right| \\ & \leq D_1 \rho \left(\frac{k}{n} b_n + u \left(x - \frac{k}{n} b_n \right) \right) + D_1 \rho \left(\frac{k}{n} b_n \right) \\ & = D_1 \left\{ 2 + \left[\frac{k}{n} b_n + u \left(x - \frac{k}{n} b_n \right) \right]^2 + \left[\frac{k}{n} b_n \right]^2 \right\} \\ & \leq 2D_1 (1 + A^2) (u^2 - u + 1) \left(x - \frac{k}{n} b_n \right)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. $D_2 = 2D_1 (1 + A^2)$ denilirse

$$\left| f^{(r)} \left(\frac{k}{n} b_n + u \left(x - \frac{k}{n} b_n \right) \right) - f^{(r)} \left(\frac{k}{n} b_n \right) \right| \leq D_2 (u^2 - u + 1) \left(x - \frac{k}{n} b_n \right)^2$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} J_{n1}(x) & \leq \sum_{k=0}^n \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \frac{\left| x - \frac{k}{n} b_n \right|^r}{(r-1)!} \\ & \quad \times \int_0^1 (1-u)^{r-1} \left| f^{(r)} \left(\frac{k}{n} b_n + u \left(x - \frac{k}{n} b_n \right) \right) - f^{(r)} \left(\frac{k}{n} b_n \right) \right| du \\ & \leq \sum_{k=0}^n \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \frac{\left| x - \frac{k}{n} b_n \right|^r}{(r-1)!} \\ & \quad \times \int_0^1 (1-u)^{r-1} D_2 (u^2 - u + 1) \left(x - \frac{k}{n} b_n \right)^2 du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{n1}(x) &\leq D_2 \frac{\int_0^1 (1-u)^{r-1} (u^2 - u + 1) du}{(r-1)!} \sum_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} b_n \right|^{r+2} \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \\
&= D_2 \frac{r^2 + 2r + 2}{(r+2)!} \sum_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} b_n \right|^{r+2} \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right)
\end{aligned}$$

olur. $D_{2,r} = \frac{r^2 + 2r + 2}{(r+2)!} D_2$ denilirse

$$J_{n1}(x) \leq D_{2,r} \sum_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} b_n \right|^{r+2} \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \quad (4.2.8)$$

elde edilir.

$x \in [0, b_n]$ için $r = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere

$$T_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} b_n - x \right)^r \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \quad (4.2.9)$$

polinomu tanımlansın. (4.1.4) ifadesinden

$$\begin{aligned}
S_{n,r} \left(\frac{x}{b_n} \right) &= \sum_{k=0}^n \left(k - n \frac{x}{b_n} \right)^r \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \\
&= \frac{n^r}{b_n^r} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} b_n - x \right)^r \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \\
&= \frac{n^r}{b_n^r} T_{n,r}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.11) ifadesinden

$$T_{n,r}(x) \leq \frac{b_n^r}{n^r} K(r) n^{\lceil \frac{r}{2} \rceil} \quad (4.2.10)$$

bulunur. Buradan aşağıdaki ifadeleri verebiliriz.

$$T_{n,2r}(x) \leq C_r A^r \left(\frac{b_n}{n} \right)^r ; 0 \leq x \leq A < b_n \quad (4.2.11)$$

$$T_{n,2r}(x) \leq K_r \left(\frac{b_n^2}{n} \right)^r ; 0 \leq x \leq b_n \quad (4.2.12)$$

$$\frac{T_{n,2r}(x)}{[\rho(x)]^{\frac{r}{2}}} \leq M_r \left(\frac{b_n}{n} \right)^r ; 0 \leq x \leq b_n \quad (4.2.13)$$

burada C_r , K_r ve M_r r' ye bağlı sabitlerdir.

(4.2.8) eşitsizliğinde, Cauchy-Schwartz-Bunyakovsky ve (4.2.11) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} J_{n1}(x) &\leq D_{2,r} \sqrt{\sum_{k \in E_1}^n \left(x - \frac{k}{n} b_n \right)^{2r+4}} \sqrt{\sum_{k \in E_1}^n \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right)} \\ &= D_{2,r} \sqrt{T_{n,2(r+1)}(x)} \\ &\leq D_{2,r} \sqrt{C_{r+1} A^{r+1}} \left(\frac{b_n}{n} \right)^{\frac{r+1}{2}} \end{aligned}$$

bulunur. $D'_r(A) = D_{2,r} \sqrt{C_{r+1} A^{r+1}}$ denilirse

$$J_{n1}(x) \leq D'_r(A) \left(\frac{b_n}{n} \right)^{\frac{r+1}{2}} \quad (4.2.14)$$

elde edilir.

Lemma 2.2.7' den $c > 0$ sayısı vardır öyle ki

$$\omega_{1+A} \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right) \geq c \sqrt{\frac{b_n}{n}} \quad (4.2.15)$$

yeterince büyük n' ler için sağlanır. (4.2.14) ve (4.2.15) eşitsizliklerinden

$$J_{n1}(x) \leq \frac{D'_r(A)}{c} \left(\frac{b_n}{n} \right)^{\frac{r}{2}} \omega_{1+A} \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right) \quad (4.2.16)$$

elde edilir.

Şimdi de $J_{n2}(x)$ ifadesini ele alalım.

$$\begin{aligned}
J_{n2}(x) &= \sum_{k \in E_2}^n \frac{|x - \frac{k}{n}b_n|^r}{(r-1)!} |I_{n,r}^k| \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \\
&\leq \sum_{k=0}^n \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \frac{|x - \frac{k}{n}b_n|^r}{(r-1)!} \\
&\quad \times \int_0^1 (1-u)^{r-1} \left| f^{(r)} \left(\frac{k}{n}b_n + u \left(x - \frac{k}{n}b_n \right) \right) - f^{(r)} \left(\frac{k}{n}b_n \right) \right| du
\end{aligned}$$

Lemma 2.2.3' den

$$\begin{aligned}
J_{n2}(x) &\leq \sum_{k=0}^n \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \frac{|x - \frac{k}{n}b_n|^r}{(r-1)!} \\
&\quad \times \int_0^1 (1-u)^{r-1} \omega_{1+A} \left(f^{(r)}; \left| u \left(1 - \frac{k}{n}b_n \right) \right| \right) du
\end{aligned}$$

dr. Lemma 2.2.5' den

$$\begin{aligned}
J_{n2}(x) &\leq \sum_{k=0}^n \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \frac{|x - \frac{k}{n}b_n|^r}{(r-1)!} \omega_{1+A} \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right) \\
&\quad \times \int_0^1 (1-u)^{r-1} \left(1 + \sqrt{\frac{n}{b_n}} u \left(x - \frac{k}{n}b_n \right) \right) du \\
&= \omega_{1+A} \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right) \\
&\quad \times \sum_{k=0}^n \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \frac{|x - \frac{k}{n}b_n|^r}{(r-1)!} \left\{ \sqrt{\frac{n}{b_n}} \left(1 - \frac{k}{n}b_n \right) \frac{1}{r(r+1)} - \frac{1}{r} \right\} \\
&= \omega_{1+A} \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right) \\
&\quad \times \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{|x - \frac{k}{n}b_n|^r}{r!} \sqrt{\frac{n}{b_n}} \left(1 - \frac{k}{n}b_n \right) \frac{1}{(r+1)} \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=0}^n \frac{|x - \frac{k}{n}b_n|^r}{r!} \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \right\}
\end{aligned}$$

dir. (4.2.10) ve (4.2.11) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
J_{n2}(x) &\leq \omega_{1+A} \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right) \\
&\quad \times \left\{ \frac{1}{r!} \sqrt{T_{n,2r}(x)} + \frac{1}{(r+1)!} \sqrt{\frac{b_n}{n}} \sqrt{T_{n,2(r+1)}(x)} \right\} \\
&\leq \omega_{1+A} \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right) \\
&\quad \times \left\{ \frac{1}{r!} \sqrt{C_r A^r \left(\frac{b_n}{n} \right)^r} + \frac{1}{(r+1)!} \sqrt{\frac{b_n}{n}} \sqrt{C_{r+1} A^{r+1} \left(\frac{b_n}{n} \right)^{r+1}} \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. $D''_r(A) = \frac{(r+1)\sqrt{C_r} + \sqrt{C_{r+1}}}{(r+1)!} \sqrt{A^{r+1}}$ denilirse

$$J_{n2}(x) \leq D''_r(A) \left(\frac{b_n}{n} \right)^{\frac{r}{2}} \omega_{1+A} \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right) \quad (4.2.17)$$

elde edilir.

(4.2.16) ve (4.2.17) eşitsizlikleri (4.2.5) ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|C_{n,r}(f; x) - f(x)| &\leq \frac{D'_r(A)}{c} \left(\frac{b_n}{n} \right)^{\frac{r}{2}} \omega_{1+A} \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right) \\
&\quad + D''_r(A) \left(\frac{b_n}{n} \right)^{\frac{r}{2}} \omega_{1+A} \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. $D_r(A) = \frac{D'_r(A)}{c} + D''_r(A)$ denilirse

$$|C_{n,r}(f; x) - f(x)| \leq D_r(A) \left(\frac{b_n}{n} \right)^{\frac{r}{2}} \omega_{1+A} \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right)$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Theorem 4.2.3 $f \in C^{(r)}(0, \infty)$ ve $f^{(r)} \in C_\rho^k(\mathbb{R})$ için

$$\sup_{x \in [0, b_n]} \frac{|C_{n,r}(f; x) - f(x)|}{[\rho(x)]^{(r+7)/4}} \leq D_r \left(\frac{b_n}{n} \right)^{\frac{r}{2}} \Omega \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right)$$

gerçeklenir. Burada D_r , r' ye bağlı bir sabittir.

İspat: Teorem 4.2.2' nin ispatında

$$|I_{n,r}^k| \leq \int_0^1 (1-u)^{r-1} \left| f^{(r)} \left(\frac{k}{n} b_n + u \left(x - \frac{k}{n} b_n \right) \right) - f^{(r)} \left(\frac{k}{n} b_n \right) \right| du \quad (4.2.18)$$

olmak üzere

$$|C_{n,r}(f; x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^n \frac{|x - \frac{k}{n} b_n|^r}{(r-1)!} |I_{n,r}^k| \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \quad (4.2.19)$$

olduğu gösterildi. Lemma 2.3.7' den

$$\begin{aligned} & \left| f^{(r)} \left(\frac{k}{n} b_n + u \left(x - \frac{k}{n} b_n \right) \right) - f^{(r)} \left(\frac{k}{n} b_n \right) \right| \\ & \leq 2 \left(1 + \frac{u(x - \frac{k}{n} b_n)}{\delta} \right) (1 + \delta^2) (1 + x^2) \left(1 + u^2 \left(x - \frac{k}{n} b_n \right)^2 \right) \Omega(f^{(r)}; \delta) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik (4.2.18) ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} |I_{n,r}^k| & \leq 2 (1 + x^2) (1 + \delta^2) \Omega(f^{(r)}; \delta) \\ & \quad \times \int_0^1 (1-u)^{r-1} \left(1 + \frac{u(x - \frac{k}{n} b_n)}{\delta} \right) \left(1 + u^2 \left(x - \frac{k}{n} b_n \right)^2 \right) du \\ & = 2 (1 + x^2) (1 + \delta^2) \Omega(f^{(r)}; \delta) \\ & \quad \times \left\{ \frac{1}{r} + \left(x - \frac{k}{n} b_n \right)^2 \frac{2}{r(r+2)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(x - \frac{k}{n} b_n)}{\delta} \frac{1}{r+2} + \frac{6(x - \frac{k}{n} b_n)^3}{\delta r(r+1)(r+2)(r+3)} \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Bu da (4.2.19) ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|C_{n,r}(f; x) - f(x)| &\leq 2 \left(1 + \frac{b_n}{n}\right) (1 + x^2) \Omega \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}}\right) \\
&\quad \times \sum_{k=0}^n \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right) \frac{|x - \frac{k}{n} b_n|^r}{(r-1)!} \left\{ \frac{1}{r} \right. \\
&\quad + \left(x - \frac{k}{n} b_n \right)^2 \frac{2}{r(r+1)(r+2)} + \frac{(x - \frac{k}{n} b_n)}{\sqrt{\frac{b_n}{n}}} \frac{1}{r+1} \\
&\quad \left. + \frac{6(x - \frac{k}{n} b_n)^3}{\sqrt{\frac{b_n}{n}} r(r+1)(r+2)(r+3)} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Cauchy-Schwartz-Bunyakovsky eşitsizliği ve (4.2.9) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
|C_{n,r}(f; x) - f(x)| &\leq 2 \left(1 + \frac{b_n}{n}\right) (1 + x^2) \Omega \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}}\right) \\
&\quad \times \left\{ \frac{1}{r!} \sqrt{T_{n,2r}(x)} + \frac{1}{(r+1)!} \sqrt{\frac{b_n}{n}} \sqrt{T_{n,2(r+1)}(x)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{(r+2)!} \sqrt{T_{n,2(r+2)}(x)} + \frac{6}{(r+3)!} \sqrt{T_{n,2(r+3)}(x)} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.2.13) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
|C_{n,r}(f; x) - f(x)| &\leq 2 \left(1 + \frac{b_n}{n}\right) (1 + x^2) \Omega \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}}\right) \\
&\quad \times \left\{ \frac{1}{r!} \sqrt{M_r} (1 + x^2)^{r/4} \left(\frac{b_n}{n}\right)^{r/2} \right. \\
&\quad + \frac{1}{(r+1)!} \sqrt{\frac{b_n}{n}} \sqrt{M_{r+1}} (1 + x^2)^{(r+1)/4} \left(\frac{b_n}{n}\right)^{(r+1)/2} \\
&\quad + \frac{2}{(r+2)!} \sqrt{M_{r+2}} (1 + x^2)^{(r+2)/4} \left(\frac{b_n}{n}\right)^{(r+2)/2} \\
&\quad \left. + \frac{6}{(r+3)!} \sqrt{M_{r+3}} (1 + x^2)^{(r+3)/4} \left(\frac{b_n}{n}\right)^{(r+3)/2} \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. $\frac{b_n}{n} \leq 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}|C_{n,r}(f; x) - f(x)| &\leq 4(1+x^2)\Omega\left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)(1+x^2)^{(r+3)/4}\left(\frac{b_n}{n}\right)^{r/2} \\ &\times \left\{ \frac{1}{r!}\sqrt{M_r} + \frac{1}{(r+1)!}\sqrt{M_{r+1}} + \frac{6}{(r+3)!}\sqrt{M_{r+3}} \right\}\end{aligned}$$

dir. $M'_r = \sum_{i=0}^3 \frac{i!\sqrt{M_{r+i}}}{(r+i)!}$ denilirse,

$$|C_{n,r}(f; x) - f(x)| \leq 4M'_r \left(\frac{b_n}{n}\right)^{r/2} (1+x^2)^{(r+7)/4} \Omega\left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

KAYNAKLAR

- Altomare, F. and Campiti, M. 1993. Korovkin-type Approximation Theory and its Applications. Walter de Gruyter, 627 p., New York.
- Ashieser, N. I., Lecture on Approximation Theory, OGIZ, Moscow-Leningrand, 1947(in Russian), Theory of Approximation (in English), Translated by C.J.Hymann, Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1956.
- Bernstein, S., 1912. Démonstration du théorème de Weierstrass. Fondéé sur le calcul des probabilités. Commun. Soc. Math. Kharkow (2), 13, 1-2.
- Bleimann, G., Butzer, P.L. and Hahn, L., 1980. Bernstein-type operator approximating continuous functions on semi-axis. Indag. Math., 42, 255-262.
- Chlodowsky, I., 1937. Sur le développement des fonctions définies dans un interval infini en séries de polynômes de M. S. Bernstein. Compositio. Math., 4, 380-393.
- Gadjiev, A.D., 1974. The Convergence Problem for a Sequence of Positive Linear Operators on Unbounded Sets and Theorems Analogous to that of P.P. Korovkin. Dokl. Akad. Nauk SSSR, tom 218, N5.
- Gadjiev, A.D., 1995. On Generalized Bernstein-Chlodowsky Polynomials. Hacettepe Bulletin of Natural Sciences and Engineering, 24, 31-40.
- Gadjiev, A.D., 1998. Generalized Bernstein-Chlodowsky Polynomials. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 28, 1267-1277.
- Gadjiev, A.D., İbikli, E., 1999. Weighted approximation by Bernstein-Chlodowsky polynomials. Indian J. Pure Appl. Math., 30, 83-87.
- Groetsch, C.W. and King, J.T., 1973. The Bernstein polynomials and finite differences. Math. Mag., 46, 280-282.
- Hacıyev, A., Hacışalihoglu, H.H., 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklılığı. 1-71p., Ankara.
- İbikli, E., 2003. On approximation by Bernstein-Chlodowsky polynomials. Math. Balkanica, 17, 259-265.
- İspir, N., On modified Baskakov operators on weighted spaces, Turk. J. Math. 26 (3) (2001) 355–365.

- İzgi, A., Büyükyazıcı, İ., İbikli, E., 2009, Rate of convergence by Chlodowsky-Taylor polynomials, *Applied Math. and Computation*, 213, 426-431.
- Kirov, G. H., A generalization of the Bernstein polynomials, *Mathematica Balkanica* (New Ser.) 6 (2) (1992) 147–153.
- Korovkin, P.P., 1953. On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* (N.S), 90, 961-964.
- Korovkin, P.P., 1960. *Linear Operators and Approximation Theory*. Russian Monographs and Texts on advanced Math., III, 1-63p., Gordon&Breach.
- Lorentz, G.G., 1953. *Bernstein Polynomials*. University of Toronto Press. 36p., Toronto.
- Martinez, F.L., 1989. Some properties of two-demansional Bernstein polynomials. *Journal of Approximation Theory*, 59, 300-306.
- Musayev, B., Alp, M., Mustafayev, N. ve Ekincioğlu, İ. 2003. *Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz I*. Tektaş Eylül Yayıncılık. 366p., Ankara.
- Natanson, I.P., 1961. *Theory of Functions of a Real Variable*. Frederick Ungar Publishing Company. 215-218p., New York.
- Natanson, I.P., 1964. *Constructive Function Theory*. Frederick Ungar Publishing Company. 75-78p., New York.
- Rudin, W., 1921. *Functional Analysis*. Kingsport Press, Inc. 6p., United States of America.
- Stancu, D.D., 1983. Approximation of functions by means of a new generalized Bernstein operator. *Estratto da Calcola*, XX, 211-229.
- Totik, V., 1984. Uniform approximation by Bernstein-type operators. *Indag. Math.*, 46, 87-93.
- Volkov, V.I., 1957. Convergence of sequences of linear positive operators in the space of continuous functions of two variables. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 115, 17-19.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Seyide ATAŞ

Doğum Yeri : ANKARA

Doğum Tarihi : 12.06.1984

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Sokullu Mehmet Paşa Lisesi (2002)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2007)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı (Şubat 2009 - Ocak 2012)