

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**$q$ -TOMURCUK FONKSİYONU ve  $q$ -BEZIER EĞRİLERİ**

**Melike SARAÇ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ANKARA  
2015**

**Her hakkı saklıdır**

## ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

19/01/2015

Melike SARAÇ

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

## $q$ -TOMURCUK FONKSİYONU VE $q$ -BEZIER EĞRİLERİ

Melike SARAÇ

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmış ve tez hakkında genel bilgilere yer verilmiştir.

İkinci bölümde, tezde gerekli olan bazı kavramlar ve özellikler ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde, Bernstein taban fonksiyonları yardımıyla oluşturulan Bézier eğrilerinin tanımı ve özellikleri ile birlikte bu eğrileri keyfi olarak bölmeye yarayan *Casteljau* algoritması verilmiştir. Ayrıca bu bölümde Bernstein taban fonksiyonlarının Bézier eğrilerinin şekli üzerindeki etkisi örnekler üzerinde gösterilmiştir. Sonrasında,  $q$ -Bernstein taban fonksiyonu kullanılarak tanımlanan  $q$ -Bézier eğrileri ve özellikleri verilmiştir. Bu eğriler için  $q$ -Casteljau algoritması ifade edilmiş ve  $q$  parametresi değişiminin  $q$ -Bézier eğrisi üzerindeki etkisi örnek üzerinde incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, oldukça önemli özelliklere sahip olan  $q$ -tomurcuk fonksiyonu ve özelliklerine yer verilip  $q$ -Bézier eğrileri ve  $q$ -tomurcuk fonksiyonu arasındaki yakın ilişki incelenmiştir. Sonrasında  $q$ -Bernstein taban fonksiyonuna ait bazı özdeşlikler  $q$ -tomurcuk fonksiyonundan yararlanılarak ispat edilmiştir.

Beşinci bölümde, sahip olduğu kontrol (Bézier) noktaları ile Bézier eğrilerinin genel olarak uygulama alanlarındaki öneminden ve bu eğrilerin  $q$  parametresinden nasıl etkilendiğine ilişkin sonuçlardan bahsedilmiştir.

**Ocak 2015, 93 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:**  $q$ -analiz,  $q$ -tomurcuk fonksiyonu,  $q$ -Bernstein taban fonksiyonları,  $q$ -Bézier eğrisi, Marsden özdeşliği, Casteljau algoritması.

## ABSTRACT

Master Thesis

### $q$ -BLOSSOM AND $q$ -BEZIER CURVES

Melike SARAÇ

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction and general information about the thesis is given.

In the second chapter some notions and properties which are needed in the thesis are explained.

In the third chapter, given the general definition of Bézier curves and their properties are examined. Also, the effects on the shape of the Bézier curves by Bernstein basis functions are illustrated. Then,  $q$ -Bezier curves have been defined using  $q$ -Bernstein basis and their properties have been given.  $q$ -Casteljau algorithms are expressed and the effects on the shape of the  $q$ -Bézier curves by shape parameter  $q$  illustrated.

In the fourth chapter,  $q$ -blossom is defined and its properties are studied. Then, the relationship between the  $q$ -Bézier curves and  $q$ -blossom is given. Moreover some identities and conclusions which are obtained for  $q$ -Bernstein basis functions are proved with help of the  $q$ -blossom.

In the fifth chapter, with possessing control (Bézier) points, the importance of Bézier curves in application areas and conclusions about how Bézier curves are affected by  $q$  parameter have mentioned.

**January 2015, 93 pages**

**Key Words:**  $q$ -analysis,  $q$ -blossom,  $q$ -Bernstein basis functions,  $q$ -Bézier curve, Marsden's identity, Casteljau algorithm.

## TEŞEKKÜR

Bu alıŐma konusunu bana veren, araŐtırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarıyla beni yönlendiren ve çalıŐmanın ilerlemede katkıda bulunan danışman hocam, Sayın Doç. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI'ya (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) ve çalıŐmalarım süresince beni her zaman destekleyen aileme en içten duygularıyla teşekkür ederim.

Bu tez "TÜBİTAK 2210-A Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı" tarafından desteklenmiştir.

Melike SARAÇ

Ankara, Ocak 2015

## İÇİNDEKİLER

|   |     |
|---|-----|
| TEZ ONAY SAYFASI  |     |
| ETİK .....  | i   |
| ÖZET.....   | ii  |
| ABSTRACT.....   | iii |
| TEŞEKKÜR.....   | iv  |
| SİMGELER DİZİNİ.....  | vi  |
| ŞEKİLLER DİZİNİ.....  | vii |
| 1. GİRİŞ.....   | 1   |
| 2. KURAMSAL TEMELLER.....   | 5   |
| 2.1 Bernstein Taban Fonksiyonları ve Özellikleri.....   | 6   |
| 2.2 $q$ -Analizde Temel Kavramlar.....  | 23  |
| 2.3 $q$ -Bernstein Taban Fonksiyonları ve Özellikleri.....  | 25  |
| 3. BEZIER ve $q$ -BEZIER EĞRİLERİ.....  | 33  |
| 3.1 Bézier Eğrileri.....  | 33  |
| 3.2 Casteljaou Algoritması ve Derece Yükseltme.....   | 41  |
| 3.3 $q$ -Bézier Eğrileri.....   | 48  |
| 4. $q$ -TOMURCUK FONKSİYONU.....  | 55  |
| 4.1 $q$ -Tomurcuk Fonksiyonu ve Aksiyomları.....  | 55  |
| 4.2 $q$ -Bézier Eğrilerinin Bazı Özelliklerinin $q$ -Tomurcuk<br>Fonksiyonu Yardımıyla Elde Edilmesi..... | 61  |
| 4.3 $q$ -Tomurcuk Fonksiyonu Yardımıyla Elde Edilen Bazı<br>Eşitlikler.....                               | 81  |
| 5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....   | 88  |
| KAYNAKLAR.....  | 90  |
| ÖZGEÇMİŞ.....   | 93  |

## SİMGELER DİZİNİ

|  |  |
|--|--|
| $C[0, 1]$                                | $[0, 1]$ aralığı üzerindeki sürekli fonksiyonlar uzayı |
| $\wp^n$                                  | Derecesi $n$ olan polinom uzayı                        |
| $\mathbb{N}$                             | Doğal sayılar kümesi                                   |
| $ \cdot $                                | Mutlak değer   |
| $\ \cdot\ $                              | Norm   |
| $\mathbb{N}_0$                           | $\mathbb{N} \cup \{0\}$                                |
| $\mathbb{R}$                             | Reel sayılar kümesi                                    |
| $\mathbb{R}^n$                           | $n$ boyutlu reel vektör uzayı                          |
| $\mathbb{R}^+$                           | Pozitif reel sayılar kümesi                            |
| $[k]_q$                                  | $q$ tamsayısı  |
| $N_q$                                    | $q$ tamsayılar kümesi                                  |
| $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ | $q$ binom katsayısı                                    |
| $\sigma$                                 | $\{1, \dots, n\}$ kümesinin permütasyonu               |
| $p(u_1, \dots, u_n; q)$                  | $q$ -Tomurcuk fonksiyonu                               |
| $\varphi_{n,k}(u_1, \dots, u_n)$         | Elementer simetrik fonksiyon                           |

## ŞEKİLLER DİZİNİ

|            |  |    |
|------------|--|----|
| Şekil 2.1  | 3 -üncü dereceden Bernstein taban fonksiyonları.....   | 7  |
| Şekil 2.2  | Tek ekstremuma sahip olma.....   | 10 |
| Şekil 3.1  | Lineer bir Bézier eğrisi.....  | 34 |
| Şekil 3.2  | Kuadratik bir Bézier eğrisi.....   | 35 |
| Şekil 3.3  | Kübik bir Bézier eğrisi.....   | 35 |
| Şekil 3.4  | $[0, 1]$ ve $[0, 2]$ aralıklarındaki kübik Bézier eğrileri.....                                    | 36 |
| Şekil 3.5  | $\mathbf{P}_1$ kontrol noktası değişimi.....   | 37 |
| Şekil 3.6  | Kontrol noktası değişimi.....  | 38 |
| Şekil 3.7  | Bézier eğrisi ve dönel cisim.....  | 39 |
| Şekil 3.8  | $\mathbf{P}_3$ kontrol noktası değişimi.....   | 40 |
| Şekil 3.9  | $\mathbf{P}_2$ ve $\mathbf{P}_4$ kontrol noktası değişimi.....                                     | 40 |
| Şekil 3.10 | $y$ eksenini etrafında dönme.....  | 41 |
| Şekil 3.11 | Algoritma ile oluşan yeni kontrol noktaları ve bu noktalar yardımıyla eğri üzerindeki değişim..... | 42 |
| Şekil 3.12 | Bölünmüş Bézier eğrileri ve kontrol çokgenleri.....  | 43 |
| Şekil 3.13 | Derece yükseltme ve $\mathbf{P}_2^{**}$ kontrol noktası değişimi.....                              | 45 |
| Şekil 3.14 | $P$ , $P^1$ ve $P^2$ Bézier eğrileri.....  | 47 |
| Şekil 3.15 | $[0, 1]$ ve $[2, 3]$ aralıklarında tanımlı $q$ -Bézier eğrileri.....                               | 50 |
| Şekil 3.16 | $[0, 1]$ üzerindeki birinci $q$ -de Casteljau algoritması ( $n = 3$ ) ...                          | 51 |
| Şekil 3.17 | $[0, 1]$ üzerindeki ikinci $q$ -de Casteljau algoritması ( $n = 3$ ) ....                          | 51 |
| Şekil 3.18 | $[a, b]$ üzerindeki ikinci $q$ -de Casteljau algoritması ( $n = 3$ ) ....                          | 52 |
| Şekil 3.19 | $0 < q \leq 1$ için $q$ parametresi değişimi.....  | 53 |
| Şekil 3.20 | $q \geq 1$ için $q$ parametresi değişimi.....  | 54 |



## 1. GİRİŞ

Yaklaşımalar teorisinin temel teoremi olarak bilinen, kapalı ve sınırlı aralıkta verilen sürekli  $f$  fonksiyonuna yaklaşan polinomun varlığı Alman matematikçi (Weierstrass 1885) tarafından ispat edilmiştir. Rus matematikçi (Bernstein 1912), ileride kendi ismiyle anılan bu polinomun varlığının yanısıra yapısını da gösteren toplam biçimindeki polinomlar dizisini tanımlamış ve bu polinomlar günümüzde en çok çalışılan, üzerine en çok makale ve kitap yazılan, birçok dalda önemli uygulamalara sahip yaklaşımalar teorisinin araçlarından biri olmuştur.

Bernstein polinomlarının yapısı;  $x$  ve  $y$  pozitif sayılar ve  $n$  bir doğal sayı olmak üzere

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

binom formülünde  $x = t$  ve  $y = 1 - t$ ,  $t \in [0, 1]$  seçildiğinde oluşan

$$1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1 - t)^{n-k}$$

birim açılımına dayanır. Bernstein polinomu,  $f \in C[0, 1]$  ve  $f$  fonksiyonunun  $t = \frac{k}{n}$  noktalarında tanımlı rasyonel değerleri için

$$B_n(f; t) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} t^k (1 - t)^{n-k}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

ile tanımlanır.

$$\begin{aligned} B_n : C[0, 1] &\rightarrow C[0, 1] \\ f &\rightarrow B_n(f; t) \end{aligned}$$

operatörü sürekli ve pozitif  $f$  fonksiyonunu pozitif bir polinoma dönüştürdüğü,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ve  $f_1, f_2 \in C[0, 1]$  olmak üzere

$$B_n(\alpha f_1 + \beta f_2; t) = \alpha B_n(f_1; t) + \beta B_n(f_2; t)$$

eşitliğini sağladığından lineer pozitif operatördür.

Bernstein polinomlar dizisi için keyfi  $\varepsilon > 0$  sayısı verildiğinde  $\forall t \in [0, 1]$  ve  $\forall n \geq n_0$  için

$$|B_n(f; t) - f(t)| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n(f; t) - f(t)\|_{C[0,1]} = 0$$

ifadesine denktir.

Bernstein polinomları birçok alanda önemli uygulamalara sahip olup bunlardan birisi de bilgisayar destekli geometrik tasarım (computer aided geometric design) larda oldukça öneme sahip olan Bézier eğrilerinin Bernstein taban fonksiyonları kullanılarak oluşturulmasıdır.

Bézier eğrilerini oluşturmada kullanılacak algoritmalar ilk kez Citroën'de çalışan fizikçi ve matematikçi (Casteljau 1959) tarafından yazılmış ve Fransız mühendis (Bézier 1970) tarafından Renault marka otomobillerin tasarımında kullanılmak üzere geliştirilmiştir.

*Casteljau* algoritması ile bir Bézier eğrisini alt bölgelere ayırma ürün tasarımlarında önemli bir uygulamadır. Çünkü algoritma ile oluşan yeni kontrol çokgenleri ardışık olarak istenilen Bézier eğrisine doğru yaklaşır. Bézier eğrilerinin sahip olduğu bu özellikler onları eğri ve yüzey tasarımında kullanışlı hale getirmektedir. Bu özel eğriler günümüzde otomobil, uçak gövde ve kanadı modelleme çalışmalarında, fontların tasarımında ve daha birçok alanda kullanılmaktadır. Bir Bézier eğrisinin kontrol çokgeni üzerinde yapılan değişiklik doğrudan eğri üzerinde etkiye sahip olup, kontrol noktalarının kullanımı sayesinde önceden ulaşılabilecek sonuçlar tahmin edilebilmektedir.

Bézier eğrilerinin temelini oluşturan Bernstein polinomlarının, son yıllarda oldukça ilgi toplayan ve birçok araştırmacı tarafından çalışılan  $q$  (*kuantum*) tamsayılarına dayalı genellemesini ilk kez (Lupaş 1987) tanımlamıştır.

Lupaş, Bernstein polinomlarının Bölüm 2.2’de tanımlanacak olan  $q$  tamsayılarına dayalı genellemesini  $f \in C[0, 1]$  ve  $R_{n,q} : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  olmak üzere

$$R_{n,q}(f) = R_n(f, q; t) = \sum_{k=0}^n f \left( \frac{[k]_q}{[n]_q} \right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \frac{q^{k(k-1)/2} t^k (1-t)^{n-k}}{(1-t+qt) \dots (1-t+q^{n-1}t)}$$

şeklinde tanımlamıştır.

(Phillips 1996) Bernstein polinomlarının  $q$  tamsayılarına dayalı farklı bir genellemesini  $f \in C[0, 1]$  ve  $B_{n,q} : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  olmak üzere

$$B_{n,q}(f) = B_n(f, q; t) = \sum_{k=0}^n f \left( \frac{[k]_q}{[n]_q} \right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q t^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s t)$$

ile tanımlamış ve bu polinomların yaklaşım özelliklerini incelemiştir.

(Oruç ve Phillips 2003),

$$B_k^n(t; q) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q t^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s t), \quad k = 0, \dots, n$$

$q$ -Bernstein taban fonksiyonlarını kullanarak  $q$ -Bézier eğrilerini ve bu eğriler için derece yükseltme ve indirgeme bağıntısı oluşturmuşlardır.

Bu tezde genel olarak Bézier eğrisini oluşturmada kullanılan *Casteljau* algoritması ile oluşan düğümlerin ifadesinde ve Bézier eğrisinin kontrol noktalarını belirtmede kullanılan tomurcuk fonksiyonunun,  $q$ -Bézier eğrisi için  $q$ -tomurcuk fonksiyonuna genişletilmesi incelenecektir.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmış olup ikinci bölümde Bernstein taban fonksiyonları tanıtılıp genel özellikleri verilecektir. Ayrıca yine bu bölümde  $q$ -analiz ile ilgili temel kavramlar ifade edilip ardından  $q$ -Bernstein taban fonksiyonu ve genel özellikleri verilecektir.

Üçüncü bölümde Bernstein taban fonksiyonları yardımıyla oluşturulan Bézier eğrileri ve bu eğrilere ait genel özelliklerle beraber keyfi bir Bézier eğrisini alt aralıklarda tanımlı Bézier eğrilerine bölmeye yarayan *Casteljau* algoritması ifade edilecektir. Bernstein taban fonksiyonlarının tanımlı oldukları aralıkta "tek ekstremum" değere sahip olması Bézier eğrilerinin kontrol noktaları ile ilişkilendirilecek ve bu durumun Bézier eğrisi üzerindeki etkisi incelenecektir. Sonrasında serbest şekil verilmiş yüzeylere (*free form surface*)  $q$ -Bernstein taban fonksiyonları yardımıyla daha iyi bir yaklaşım yapmayı amaçlayan  $q$ -Bézier eğrileri tanımlanacak ve Bézier eğrilerindekine benzer olarak eğrileri tanımlı olduğu aralığın alt aralıklarında bölmeye yarayan ve böylelikle sonucunda farklı  $q$ -Bézier eğrileri elde edilen  $q$ -Casteljau algoritması ifade edilecektir. Bézier eğrilerine yeni bir bakış getiren  $q$  parametresinin  $q$ -Bézier eğrileri üzerindeki etkisi ve  $q$  parametresi değişiminin eğri üzerindeki şekil değişikliği incelenecektir.

Dördüncü bölümde belirli özelliklere sahip özel bir fonksiyon olan  $q$ -tomurcuk fonksiyonunun tanımı ve özelliklerine yer verilecektir ( $q = 1$  alındığında klasik tomurcuk fonksiyonu elde edilir). Ayrıca bu özel fonksiyon  $q$ -Bézier eğrileri ile ilişkilendirilerek  $q$ -*Casteljau* algoritmasındaki düğümler ve  $\mathbf{P}_k$ ,  $k = 0, \dots, n$  kontrol noktaları bu fonksiyon yardımıyla ifade edilecektir. Yine bu bölümde herhangi bir  $P(t)$  polinomunun  $q$ -tomurcuk fonksiyonu ile ifadesi verilip ardından  $q$ -Bernstein taban fonksiyonlarına ait bazı eşitliklerin ispatı bu fonksiyon yardımıyla yapılacaktır.

Son bölüm ise tartışma ve sonuç kısmına ayrılmıştır.

## 2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde çalışma boyunca yararlanılacak ve ileride Bézier eğrilerini tanımlamada temel teşkil edecek olan bazı tanımlar, önermeler ve özellikler ifade edilecektir.

**Tanım 2.1 (Polinom)**  $m \in \mathbb{N}$  ve  $c_0, c_1, \dots, c_m$  ler de  $c_m \neq 0$  olmak üzere sabit sayılar olsun.

$$P(x) = c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \dots + c_1 x + c_0$$

şeklinde tanımlanan  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonuna polinom denir (Szegö 1967).

**Tanım 2.2 (Polinomun derecesi)**  $m \in \mathbb{N}$  ve  $c_0, c_1, \dots, c_m$  ler de  $c_m \neq 0$  olmak üzere sabit sayılar olsun.

$$P(x) = c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \dots + c_1 x + c_0$$

şeklinde tanımlanan  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonundaki  $m$  doğal sayısına polinomun derecesi denir (Szegö 1967).

**Tanım 2.3 (Afin kombinasyon)**  $k = 0, \dots, n$  olmak üzere  $\forall c_k$  sabiti ve  $P_k$  noktası için  $\sum_{k=0}^n c_k = 1$  olacak şekilde  $\sum_{k=0}^n c_k P_k$  toplamının her kombinasyonuna afin kombinasyon denir (Goldman 2002).

**Tanım 2.4 (Vektör uzayı)**  $\mathbb{R}$  üzerinde bir  $V$  cümlesi,  $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$  ve  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  skalarları için toplama ve skalar ile çarpma işlemleriyle birlikte;

- 1)  $\vec{x} + \vec{y} \in V$
- 2)  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
- 3)  $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$
- 4)  $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$  olacak şekilde bir  $\vec{0} \in V$  vardır.
- 5)  $(\vec{x} + (-\vec{x})) = \vec{0}$  olacak şekilde bir tek  $(-\vec{x}) \in V$  vardır.
- 6)  $\alpha \vec{x} \in V$

- 7)  $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$   
 8)  $1\vec{x} = \vec{x}$   
 9)  $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$   
 10)  $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$

aksiyomlarını sağlıyorsa  $V$ 'ye bir reel vektör uzayı denir (Halmos 1974).

**Örnek 2.1**  $n$  -inci dereceden polinom uzayı  $\wp^n$  bir vektör uzayıdır.

**Önerme 2.1 (Tek terimliler için Descartes işaret kuralı)**  $n$  -inci dereceden bir  $P(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$  polinomunun  $(0, \infty)$  aralığındaki köklerinin sayısı  $N$  ( $N \leq n$ ) ve  $a_k$ ,  $k = 0, \dots, n$  katsayılarının işaret değişim sayısı  $s(a_0, \dots, a_n)$  olmak üzere

$$N \leq s(a_0, \dots, a_n)$$

dir (Goldman 2002).

## 2.1 Bernstein Taban Fonksiyonları ve Özellikleri

### 2.1.1 Bernstein taban fonksiyonları

**Tanım 2.1.1 (Bernstein polinomu)**  $f \in C[0, 1]$  olmak üzere  $f$  fonksiyonunun  $n$  -inci dereceden Bernstein polinomu

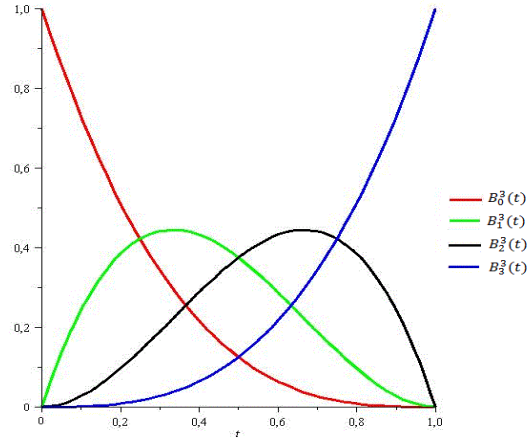
$$B_n(f; t) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}, \quad t \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.1)$$

ile tanımlanır (Bernstein 1912).

**Tanım 2.1.2 (Bernstein taban fonksiyonları)** (2.1) ifadesindeki

$$B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}, \quad t \in [0, 1], \quad 0 \leq k \leq n$$

fonksiyonlarına  $n$  -inci dereceden Bernstein taban fonksiyonları denir.



Şekil 2.1 3 -üncü dereceden Bernstein taban fonksiyonları

**Not 2.1.1**  $B_k^n(t)$ ,  $k = 0, \dots, n$  Bernstein taban fonksiyonları için

$$k < 0 \text{ veya } k > n \Rightarrow B_k^n(t) = 0$$

$$k = n = 0 \Rightarrow B_k^n(t) = 1$$

dir.

**Tanım 2.1.3** ( $[a, b]$  aralığındaki Bernstein taban fonksiyonları)  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlı Bernstein taban fonksiyonları

$$B_k^n(t; [a, b]) = \binom{n}{k} \frac{(t-a)^k (b-t)^{n-k}}{(b-a)^n}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad a \leq t \leq b$$

ile tanımlanır.

### 2.1.2 Bernstein taban fonksiyonlarının özellikleri

**Teorem 2.1.1**  $n$  -inci dereceden Bernstein taban fonksiyonları aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(i) **Simetri:**

$$B_{n-k}^n(1-t) = B_k^n(t)$$

(ii) **İndirgeme bağıntısı:**  $n$ -inci dereceden Bernstein taban fonksiyonları  $(n-1)$ -inci dereceden iki Bernstein taban fonksiyonu cinsinden yazılabilir. Böylece  $n$ -inci dereceden  $k$ -inci Bernstein taban fonksiyonu

$$B_k^n(t) = (1-t)B_k^{n-1}(t) + tB_{k-1}^{n-1}(t)$$

şeklinde ifade edilir.

(iii) **Negatif olmama:**  $\forall t \in [0, 1]$  için

$$B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \geq 0$$

dır.

(iv) **Birimin parçalanması:**  $\forall t \in [0, 1]$  için

$$\sum_{k=0}^n B_k^n(t) = 1$$

dir.

(v) **Derece yükseltme:** Derecesi  $n$ -den küçük olan Bernstein taban fonksiyonları  $n$ -inci dereceden Bernstein taban fonksiyonlarının lineer kombinasyonu olarak

$$B_k^{n-1}(t) = \frac{n-k}{n} B_k^n(t) + \frac{k+1}{n} B_{k+1}^n(t)$$

şeklinde ifade edilir.

Özel olarak Bernstein taban fonksiyonları için

$$tB_k^n(t) = \frac{k+1}{n+1} B_{k+1}^{n+1}(t) \quad (2.2)$$



ve

$$(1-t)B_k^n(t) = \frac{n-k+1}{n+1}B_{k+1}^{n+1}(t) \quad (2.3)$$

eşitlikleri geçerli olup bu eşitlikler ileride Bézier eğrilerinin şeklini değiştirmeden derecesini yükseltmede kullanılacaktır.

(vi) **Kuvvet bazı**  $\{t^k; k = 0, \dots, n\}$  **ile ilişki:**  $n$ -inci dereceden polinom uzayının bir bazı olan  $n$ -inci dereceden Bernstein taban fonksiyonları ve kuvvet bazı arasında

$$B_k^n(t) = \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} \binom{n}{j} \binom{j}{k} t^j, \quad k = 0, \dots, n$$

ve

$$t^k = \sum_{j=k}^n \frac{\binom{j}{k}}{\binom{n}{k}} B_j^n(t), \quad k = 0, \dots, n \quad (2.4)$$

eşitlikleri sağlar.

Özel olarak (2.4) eşitliğinde  $k = 0$  alınırsa

$$1 = \sum_{j=0}^n B_j^n(t)$$

ifadesi Bernstein taban fonksiyonlarının birimin parçalanması özelliğini verir.

$k = 1$  durumunda ise

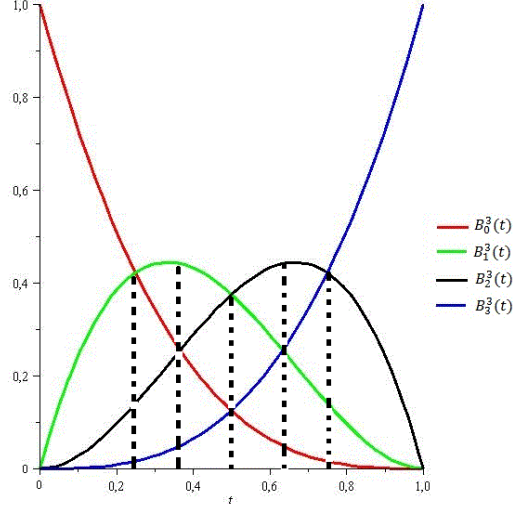
$$t = \sum_{j=1}^n \frac{j}{n} B_j^n(t)$$

elde edilir.

(vii) **Tek ekstremuma sahip olma:**  $B_k^n(t)$ ,  $k = 0, \dots, n$ ,  $t \in [0, 1]$  Bernstein taban fonksiyonları  $t = \frac{k}{n}$  noktasında bir tek ekstremuma sahiptir. Ayrıca  $t_* \in [0, 1]$  değeri için

$$B_0^n(t_*) \leq \dots \leq B_{k-1}^n(t_*) \leq B_k^n(t_*) \geq B_{k+1}^n(t_*) \geq \dots \geq B_n^n(t_*)$$

eşitsizliği gerçekleşecek şekilde bir  $k$  indisi vardır.



Şekil 2.2 Tek ekstremuma sahip olma

Şekil 2.2'de görüldüğü gibi  $[0, 1]$  aralığının alt aralıklarında Bernstein taban fonksiyonları için

$$B_0^n(t_*) \leq \dots \leq B_{k-1}^n(t_*) \leq B_k^n(t_*) \geq B_{k+1}^n(t_*) \geq \dots \geq B_n^n(t_*)$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Bernstein taban fonksiyonlarının sağladığı bu özelliğin bir sonucu olarak ileride tanımlayacağımız  $k$  indisine karşılık gelen  $\mathbf{P}_k$ ,  $k = 0, \dots, n$  kontrol noktasının  $t = t_*$  noktasında Bézier eğrisi üzerindeki etkisinin diğer kontrol noktalarından daha fazla olduğunu bir örnek üzerinde göstereceğiz.

(viii) **Alt ve üst sınırlar:** Bernstein taban fonksiyonlarının  $n$ -inci dereceden polinom uzayı için baz oluşturduğu göz önüne alınırsa

$$\forall t \in [0, 1] \text{ ve } P(t) = \sum_{k=0}^n c_k B_k^n(t)$$

için

$$\min_{0 \leq k \leq n} c_k \leq P(t) \leq \max_{0 \leq k \leq n} c_k$$

eşitsizliği gerçekleşir.

(ix) **Uç nokta değerleri:**

$$P(t) = \sum_{k=0}^n c_k B_k^n(t)$$

polinomunun  $[0, 1]$  aralığının uç noktalarında aldığı değerler

$$P(0) = c_0 \text{ ve } P(1) = c_n$$

dir.

(x) **Azalan salınım özelliği:**  $t \in [0, 1]$  için

$$P(t) = \sum_{k=0}^n c_k B_k^n(t)$$

polinomunun pozitif reel köklerinin sayısı  $N$ , Bernstein taban fonksiyonu katsayılarının  $(c_k, k = 0, \dots, n)$  işaret değişim sayısı  $s(c_0, \dots, c_n)$  den küçüktür. Böylece

$$N \leq s(c_0, \dots, c_n)$$

gerçeklenir.

(xi) **Yeniden parametrelendirme formülü:**  $t \rightarrow rt$  ve  $t \rightarrow a(1-t) + bt$  dönüşümleri sırasıyla  $[0, 1]$  aralığını  $[0, r]$  ve  $[a, b]$  aralıklarına dönüştürmek üzere;

$$B_k^n(rt) = \sum_{j=k}^n B_k^j(r) B_j^n(t)$$

ve

$$B_k^n(a(1-t) + bt) = \sum_{i=0}^k a^{k-i} b^i B_i^k(t) \times \left\{ \sum_{j=k}^n \sum_{m=j}^n \frac{(a-b+1)^{j-k} B_{j-k}^j(t)}{(1-t)^k} \binom{m}{j} (-a)^{m-j} \frac{B_m^n(t)}{t^m} \right\}$$

$k = 0, \dots, n$

(2.5)

eşitlikleri gerçekenir.

**İspat. (i) Simetri:**

$$\begin{aligned} B_{n-k}^n(1-t) &= \binom{n}{n-k} (1-t)^{n-k} t^{n-(n-k)} \\ &= \binom{n}{n-k} (1-t)^{n-k} t^k \\ &= \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\ &= B_k^n(t) \end{aligned}$$

(ii) **İndirgeme bağıntısı:**

$$\begin{aligned} (1-t) B_k^{n-1}(t) + t B_{k-1}^{n-1}(t) &= (1-t) \binom{n-1}{k} t^k (1-t)^{(n-1)-k} \\ &\quad + t \binom{n-1}{k-1} t^{k-1} (1-t)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= \binom{n-1}{k} t^k (1-t)^{n-k} + \binom{n-1}{k-1} t^k (1-t)^{n-k} \\ &= \left[ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] t^k (1-t)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\ &= B_k^n(t) \end{aligned}$$

(iii) **Negatif olmama:**  $\forall t \in [0, 1]$  için

$$B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \geq 0$$

olduğu açıktır.

(iv) **Birimin parçalanması:** Binom açılımından

$$\begin{aligned} 1^n &= [(1-t) + t]^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n B_k^n(t) \end{aligned}$$

dir. Diğer bir ispat yöntemi olarak

$$\sum_{i=0}^k B_i^k(t) = \sum_{i=0}^{k-1} B_i^{k-1}(t)$$

eşitliğinin gösterilmesi yeterlidir. Çünkü

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) = \dots = \sum_{i=0}^1 B_i^1(t) = B_0^1(t) + B_1^1(t) = 1$$

dir. Gerçekten indirgeme bağıntısı uygulandığında,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k B_i^k(t) &= \sum_{i=0}^k [(1-t) B_i^{k-1}(t) + t B_{i-1}^{k-1}(t)] \\ &= (1-t) \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} B_i^{k-1}(t) + B_k^{k-1}(t) \right\} \\ &\quad + t \left\{ \sum_{i=1}^k B_{i-1}^{k-1}(t) + B_{-1}^{k-1}(t) \right\} \\ &= (1-t) \sum_{i=0}^{k-1} B_i^{k-1}(t) + t \sum_{i=0}^{k-1} B_i^{k-1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} B_i^{k-1}(t) \end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir.

(v) **Derece yükseltme:** İspat için öncelikle

$$\frac{1}{\binom{n}{i}} B_i^n(t) + \frac{1}{\binom{n}{i+1}} B_{i+1}^n(t) = \frac{1}{\binom{n-1}{i}} B_i^{n-1}(t)$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\binom{n}{i}} B_i^n(t) + \frac{1}{\binom{n}{i+1}} B_{i+1}^n(t) &= t^i (1-t)^{n-i} + t^{i+1} (1-t)^{n-(i+1)} \\ &= t^i (1-t)^{n-i-1} [(1-t) + t] \\ &= t^i (1-t)^{n-i-1} \\ &= \frac{1}{\binom{n-1}{i}} B_i^{n-1}(t) \end{aligned}$$

Şimdi bu eşitliği kullanarak keyfi bir Bernstein taban fonksiyonunu daha yüksek dereceden Bernstein taban fonksiyonları cinsinden yazalım.

$(n-1)$  -inci dereceden  $i$  -inci Bernstein taban fonksiyonu için

$$\begin{aligned} B_i^{n-1}(t) &= \binom{n-1}{i} \frac{1}{\binom{n-1}{i}} B_i^{n-1}(t) \\ &= \binom{n-1}{i} \left[ \frac{1}{\binom{n}{i}} B_i^n(t) + \frac{1}{\binom{n}{i+1}} B_{i+1}^n(t) \right] \\ &= \frac{n-i}{n} B_i^n(t) + \frac{i+1}{n} B_{i+1}^n(t) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Bu özellik genelleştirilirse;

$\forall k < n$  için  $k$ -ıncı dereceden Bernstein taban fonksiyonu  $n$ -inci dereceden Bernstein taban fonksiyonu cinsinden yazılır.

Şimdi (2.2) ve (2.3) ifadelerini ispatlayalım.

$$\begin{aligned} tB_i^n(t) &= t \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= \binom{n}{i} t^{i+1} (1-t)^{(n+1)-(i+1)} \\ &= \frac{\binom{n}{i} \binom{n+1}{i+1}}{\binom{n+1}{i+1}} t^{i+1} (1-t)^{(n+1)-(i+1)} \\ &= \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i+1}} B_{i+1}^{n+1}(t) \\ &= \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(t) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (1-t) B_i^n(t) &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i+1} \\ &= \frac{\binom{n}{i} \binom{n+1}{i}}{\binom{n+1}{i}} t^i (1-t)^{n+1-i} \\ &= \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i}} B_i^{n+1}(t) \\ &= \frac{n-i+1}{n+1} B_i^{n+1}(t) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

(vi) **Kuvvet bazı**  $\{t^k; k = 0, \dots, n\}$  **ile ilişki:**

$B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$  ifadesinde

$$(1-t)^{n-k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (-1)^i t^i$$

binom açılımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} B_k^n(t) &= \binom{n}{k} t^k \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (-1)^i t^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n}{k} \binom{n-k}{i} t^{i+k} \\ &= \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k} t^i \\ &= \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} \binom{n}{i} \binom{i}{k} t^i \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi

$$t^k = \sum_{j=k}^n \frac{\binom{j}{k}}{\binom{n}{k}} B_j^n(t), \quad k = 0, \dots, n$$

eşitliğini tümevarım yöntemi ile ispatlayalım.

$k = 0$  için  $\sum_{j=0}^n B_j^n(t) = 1$  olup açıkça bu eşitlik Bernstein taban fonksiyonlarının birim açılıma sahip olmasıdır.

$k - 1$  için

$$t^{k-1} = \sum_{j=k-1}^n \frac{\binom{j}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} B_j^n(t)$$

eşitliği doğru olsun.  $k$  için doğru olduğunu göstereyim.



(2.2) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} t^k &= t t^{k-1} \\ &= t \sum_{j=k-1}^n \frac{\binom{j}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} B_j^n(t) \\ &= \sum_{j=k-1}^n \frac{\binom{j}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} \frac{j+1}{n+1} B_{j+1}^{n+1}(t) \\ &= \sum_{j=k}^{n+1} \frac{\binom{j-1}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} \frac{j}{n+1} B_j^{n+1}(t) \\ &= \sum_{j=k}^n \frac{\binom{j}{k}}{\binom{n}{k}} B_j^n(t) \end{aligned}$$

elde edilir.

Özel olarak  $k = 1$  için

$$\begin{aligned} t &= \sum_{j=1}^n \frac{\binom{j}{1}}{\binom{n}{1}} B_j^n(t) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{j}{n} B_j^n(t) \\ &= \frac{B_1^n(t) + 2B_2^n(t) + \dots + nB_n^n(t)}{n} \end{aligned}$$

elde edilir.

(vii) **Tek ekstremuma sahip olma:**  $[0, 1]$  aralığı üzerinde  $B_0^n(t) = (1-t)^n$  ve  $B_n^n(t) = t^n$  olup Bernstein taban fonksiyonları monotondur. Çünkü  $B_n^n(t)$ ,  $[0, 1]$  aralığında monoton artarken  $B_0^n(t)$  de  $[0, 1]$  aralığında monoton azalır. Bu yüzden bu iki Bernstein taban fonksiyonunun bir maksimum değeri olacaktır.

Şimdi  $B_k^n(t)$ ,  $k = 1, \dots, n-1$  Bernstein taban fonksiyonlarının maksimum değerini araştıralım. Bunun için

$$B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

Bernstein taban fonksiyonunun  $t$  değişkenine göre türevi alırsa

$$\begin{aligned} \frac{dB_k^n(t)}{dt} &= k \binom{n}{k} t^{k-1} (1-t)^{n-k} - (n-k) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k-1} \\ &= \binom{n}{k} t^{k-1} (1-t)^{n-k-1} [k(1-t) - (n-k)t] \\ &= \binom{n}{k} t^{k-1} (1-t)^{n-k-1} (k-nt) \end{aligned}$$

olup

$$\frac{dB_k^n(t)}{dt} = 0$$

denkleminin tek çözümü  $\forall t \in (0, 1)$  için  $t = \frac{k}{n}$  dir.

Şimdi sabit bir  $t_*$  değeri için

$$B_0^n(t_*) \leq \dots \leq B_{k-1}^n(t_*) \leq B_k^n(t_*) \geq B_{k+1}^n(t_*) \geq \dots \geq B_n^n(t_*)$$

eşitsizliği gerçekleşecek şekilde bir  $k$  indisinin var olduğunu gösterelim. Bunun için  $n$  üzerinden tümevarım yöntemini uygularsak  $n = 0$  ve  $n = 1$  için eşitsizlik doğrudur.

Kabul edelim ki bu eşitsizlik  $(n-1)$ -inci dereceden Bernstein taban fonksiyonları için doğru olsun. Yani

$$B_0^{n-1}(t_*) \leq \dots \leq B_{k-1}^{n-1}(t_*) \leq B_k^{n-1}(t_*) \geq B_{k+1}^{n-1}(t_*) \geq \dots \geq B_n^{n-1}(t_*) \quad (2.6)$$

sağlansın.  $n$  -inci dereceden Bernstein taban fonksiyonları için geçerli olan

$$B_k^n(t) = (1-t)B_k^{n-1}(t) + tB_{k-1}^{n-1}(t)$$

indirgeme bağıntısı  $B_k^n(t)$  fonksiyonunun  $B_k^{n-1}(t)$  ve  $B_{k-1}^{n-1}(t)$  fonksiyonlarının konveks kombinasyonu olduğunu, yani  $B_k^n(t)$  fonksiyonunun  $B_k^{n-1}(t)$  ve  $B_{k-1}^{n-1}(t)$  fonksiyonlarının arasında yer aldığını söyler. Bu bağıntı ile birlikte  $(n-1)$  -inci dereceden Bernstein taban fonksiyonları için (2.6) eşitsizliği de kullanılırsa

$$\begin{aligned} B_0^n(t_*) &\leq B_0^{n-1}(t_*) \dots \leq B_{k-1}^{n-1}(t_*) \leq B_k^n(t_*) \leq B_k^{n-1}(t_*) \geq B_{k+1}^n(t_*) \geq B_{k+1}^{n-1}(t_*) \\ &\geq \dots \geq B_{n-1}^{n-1}(t_*) \geq B_n^n(t_*) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$B_0^n(t_*) \leq \dots \leq B_{k-1}^n(t_*) \leq B_k^n(t_*) \geq B_{k+1}^n(t_*) \geq \dots \geq B_n^n(t_*)$$

olacak şekilde bir  $k$  indisi mevcuttur.

(viii) **Alt ve üst sınırlar:**  $B_k^n(t)$ ,  $k = 0, \dots, n$  Bernstein taban fonksiyonlarının  $n$  -inci dereceden polinom uzayı  $\varphi^n$  için baz oluşturduğu göz önünde bulundurulursa  $k = 0, \dots, n$  için  $c_k$  sabit katsayıları göstermek üzere

$$P(t) = \sum_{k=0}^n c_k B_k^n(t)$$

yazılır.

$$\min_{0 \leq k \leq n} c_k \leq P(t) \leq \max_{0 \leq k \leq n} c_k$$

ve

$$\sum_{k=0}^n B_k^n(t) = 1$$

olduğundan

$$\min_{0 \leq k \leq n} c_k \leq \sum_{k=0}^n c_k B_k^n(t) = P(t) \leq \max_{0 \leq k \leq n} c_k$$

eşitsizliği gerçekleşir.

(ix) **Uç nokta değerleri:**

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{k=0}^n c_k B_k^n(t) \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\ &= c_0 (1-t)^n + c_1 n t (1-t)^{n-1} + \dots + c_{n-1} \binom{n}{n-1} t^{n-1} (1-t) + c_n t^n \end{aligned}$$

açılımında  $t = 0$  ve  $t = 1$  için

$$P(0) = c_0 \text{ ve } P(1) = c_n$$

bulunur.

(x) **Azalan salınım özelliği:**

$$t \in (0, 1) \rightarrow u \in (0, \infty)$$

$t(u) = \frac{u}{1+u}$  dönüşümü  $(0, 1)$  aralığında tanımlı  $P(t)$  polinomunu  $(0, \infty)$  aralığında tanımlı  $Q(u)$  fonksiyonuna dönüştürür.  $P(t(u)) = \sum_{k=0}^n c_k B_k^n(t(u))$  olmak üzere

$$\begin{aligned} Q(u) &= P(t(u)) \\ &= P\left(\frac{u}{1+u}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n c_k B_k^n\left(\frac{u}{1+u}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \binom{n}{k} \left(\frac{u}{1+u}\right)^k \left(\frac{1}{1+u}\right)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \binom{n}{k} \frac{u^k}{(1+u)^n} \\ &= (1+u)^{-n} \sum_{k=0}^n a_k u^k, \quad a_k = c_k \binom{n}{k} \end{aligned}$$

elde edilir.

Açık olarak  $c_k$  ve  $a_k$  katsayıları aynı işaretli olup  $Q(u)$  nun  $(0, \infty)$  aralığındaki kökleri ile  $P(t)$  polinomunun  $(0, 1)$  aralığındaki kökleri ilişkilidir. Gerçekten

$$\frac{B_k^n(t)}{(1-t)^n} = \frac{\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}}{(1-t)^n} = \binom{n}{k} \left(\frac{t}{1-t}\right)^k$$

eşitliğinde

$$u = \frac{t}{1-t}$$

dönüşümü uygulanırsa

$$\frac{B_k^n(t)}{(1-t)^n} = \binom{n}{k} u^k = M_k^n(u)$$

elde edilir.

Böylece  $P(t) = \sum_{k=0}^n c_k B_k^n(t)$  polinomunun  $(0, 1)$  aralığındaki köklerinin sayısı  $N$  ise

$c_k M_k^n(u)$  polinomunun  $(0, \infty)$  aralığındaki köklerinin sayısı da  $N$  olur.

Tek terimliler için Descartes işaret kuralı uygulanırsa

$$N \leq s(c_0, \dots, c_n)$$

olduğu görülür.

(xi) **Yeniden parametrelendirme formülü:**

$$B_k^n(rt) = \binom{n}{k} (1-rt)^{n-k} (rt)^k$$

ifadesinde  $1-rt$  yerine  $(1-t) + (1-r)t$  yazılıp  $(1-rt)^{n-k}$  ifadesinin binom açılımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
B_k^n(rt) &= \binom{n}{k} [(1-t) + (1-r)t]^{n-k} (rt)^k \\
&= \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} ((1-r)t)^j (1-t)^{n-k-j} r^k t^k \\
&= \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} (1-r)^j t^{j+k} r^k (1-t)^{n-k-j} \\
&= \sum_{j=k}^n \binom{n}{k} \binom{n-k}{j-k} (1-r)^{j-k} t^j (1-t)^{n-j} r^k \\
&= \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} \binom{n}{j} r^k (1-r)^{j-k} t^j (1-t)^{n-j} \\
&= \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} r^k (1-r)^{j-k} \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} \\
&= \sum_{j=k}^n B_k^j(r) B_j^n(t)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer işlemler

$$B_k^n(a(1-t) + bt) = \binom{n}{k} (1 - a(1-t) - bt)^{n-k} (a(1-t) + bt)^k$$

ifadesi için uygulanırsa (2.5) eşitliği elde edilir.

**Önerme 2.1.1**  $n$  -inci dereceden Bernstein taban fonksiyonları  $n$  -inci dereceden polinom uzayı  $\varphi^n$  için baz oluşturur.

**İspat.**  $B_k^n(t)$ ,  $0 \leq k \leq n$  fonksiyonları  $\varphi^n$  uzayını gererler. Bu durum Bernstein taban fonksiyonlarının  $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$  kuvvet bazı cinsinden yazılmasından görülür.

$B_k^n(t)$ ,  $0 \leq k \leq n$  fonksiyonları lineer bağımsızdır. Gerçekten  $c_0, c_1, \dots, c_n$  sabitleri için

$$c_0 B_0^n(t) + c_1 B_1^n(t) + \dots + c_n B_n^n(t) = 0$$

eşitliğinin sağlanması  $B_k^n(t)$ ,  $0 \leq k \leq n$  fonksiyonlarının kuvvet bazı cinsinden

yazıldığı ve kuvvet bazının lineer bağımsız olduğu göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}
c_0 &= 0 \\
\sum_{i=0}^1 c_i \binom{n}{1} \binom{1}{1} &= 0 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
\sum_{i=0}^n c_i \binom{n}{n} \binom{n}{n} &= 0
\end{aligned}$$

$i = 0, \dots, n$  için  $\forall c_i = 0$  olması ile mümkündür.

Bernstein taban fonksiyonları germe ve lineer bağımsızlık özelliklerini sağladığından  $\wp^n$  polinom uzayı için bir baz oluşturur.

## 2.2 $q$ -Analizde Temel Kavramlar

Bu bölümde ilk kez (Lupaş 1987) tarafından yaklaşımlar teorisine uygulanan ve son yıllarda klasik analizde var olan birçok tanım ve teoremin genelleştirilmesi üzerine çalışılan  $q$ -analiz (*kuantum analiz*) in kısaca temel tanım ve kavramları verilecektir.

**Tanım 2.2.1 ( $q$ -tamsayısı)**  $q \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere negatif olmayan bir  $k$  tamsayısının  $q$  genellemesi

$$[k]_q = \begin{cases} \frac{1 - q^k}{1 - q}, & q \neq 1 \\ k, & q = 1 \end{cases}$$

şeklindedir (Kac ve Cheung 2002). Bu tanım  $k$  herhangi bir reel sayı olacak şekilde genişletilirse  $[k]_q$  ifadesine  $q$  reel sayısı denir. Tanım gereği  $N_q$ ,  $q$  tamsayılar kümesi

$$N_q = \{0, 1, 1 + q, 1 + q + q^2, \dots\}$$

şeklinde yazılabilir. Açık olarak  $q = 1$  durumunda  $N_q$  kümesi negatif olmayan

tamsayılar kümesini ifade eder.

**Tanım 2.2.2** (*q-faktöriyel*) Bir  $k$  tamsayısının  $q$ -faktöriyeli

$$[k]_q! = \begin{cases} [k]_q [k-1]_q \dots [1]_q, & k = 1, 2, \dots \\ 1, & k = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Kac ve Cheung 2002).

**Tanım 2.2.3** (*q-binom katsayısı*)  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$   $q$  binom katsayısı açılımı  $n \geq k \geq 0$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!} = \frac{[n]_q [n-1]_q \dots [n-k+1]_q}{[k]_q!}$$

ile tanımlanır (Kac ve Cheung 2002).

**Önerme 2.2.1** (*Pascal özdeşlikleri*)  $1 \leq k \leq n-1$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q \quad (2.7)$$

ve

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q \quad (2.8)$$

eşitlikleri gerçekleşir (Kac ve Cheung 2002).

**İspat.**  $1 \leq k \leq n-1$  için

$$\begin{aligned} [n]_q &= 1 + q + \dots + q^{n-1} \\ &= (1 + q + \dots + q^{k-1}) + q^k (1 + q + \dots + q^{n-k-1}) \\ &= [k]_q + q^k [n-k]_q \end{aligned}$$



olup

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q &= \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!} = \frac{[n-1]_q! [n]_q}{[k]_q! [n-k]_q!} \\
&= \frac{[n-1]_q! \left( [k]_q + q^k [n-k]_q \right)}{[k]_q! [n-k]_q!} \\
&= \frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q! [n-k]_q!} + q^k \frac{[n-1]_q!}{[k]_q! [n-k-1]_q!} \\
&= \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q
\end{aligned}$$

dir.

Bu da bize (2.7) eşitliğini verir. Şimdi (2.8) eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

$q$ -binom katsayısının simetri özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q &= \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q \\
&= \begin{bmatrix} n-1 \\ n-k-1 \end{bmatrix}_q + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ n-k \end{bmatrix}_q \\
&= \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q
\end{aligned}$$

elde edilir.

### 2.3 $q$ -Bernstein Taban Fonksiyonları ve Özellikleri

**Tanım 2.3.1 ( $q$ -Bernstein polinomu)** Bernstein polinomlarının  $q$  tamsayılarına dayalı genellemesi (Phillips 1996) tarafından  $f \in C[0, 1]$  olmak üzere

$$B_{n,q}(f; t) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q t^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s t), \quad t \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlanmıştır (Oruç ve Phillips 2003).

**Tanım 2.3.2** (*q-Bernstein taban fonksiyonları*) (2.9) ifadesindeki

$$B_k^n(t; q) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q t^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s t), \quad t \in [0, 1], \quad 0 \leq k \leq n$$

fonksiyonlarına *q*-Bernstein taban fonksiyonları denir.

Bernstein taban fonksiyonlarının *q* tipli genellemesindeki amaç; *q* nun seçimiyle farklı yaklaşımlar yapabilen Bézier eğrileri elde etmek olacaktır.

**Önerme 2.3.1**  $[0, 1]$  aralığındaki *q*-Bernstein taban fonksiyonları

$$B_k^n(t; q) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q t^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s t), \quad t \in [0, 1], \quad 0 \leq k \leq n$$

olmak üzere  $q = -1$ ,  $n$  çift ve  $k$  tek olma durumunda  $n$  -inci dereceden polinom uzayı için baz oluşturmaz (Simeonov vd. 2010).

**İspat.**  $q = -1$ ,  $n$  çift ve  $k$  tek olma durumu için  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$  *q*-binom katsayıları sıfırdır.

Gerçekten

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(1 - q^n)(1 - q^{n-1}) \dots (1 - q^{n-k+1})}{(1 - q^k)(1 - q^{k-1}) \dots (1 - q)}$$

açılımında  $n = 2m$ ;  $k = 2m + 1$ ;  $m = 0, 1, \dots$  olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q &= \frac{(1 - q^{2m})(1 - q^{2m-1}) \dots (1 - q^0)}{(1 - q^{2m+1})(1 - q^{2m}) \dots (1 - q)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumun bir sonucu olarak;  $B_k^n(t; q)$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $0 \leq k \leq n$  taban fonksiyonları  $n$  -inci dereceden polinom uzayı için baz oluşturmaz.

**Sonuç 2.3.1** *q*-Bézier eğrilerini oluşturmada  $q = -1$  durumunda  $B_k^n(t; q) \neq 0$  olması için  $n$  sayısı tek sayı olarak alınmalıdır.

**Tanım 2.3.3** ( $[a, b]$  aralığındaki  $q$ -Bernstein taban fonksiyonları) Keyfi bir  $[a, b]$  aralığındaki  $q$ -Bernstein taban fonksiyonları

$$B_i^n(t; [a, b]; q) = \left[ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right]_q \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (t - aq^j) \prod_{j=0}^{n-i-1} (b - tq^j)}{\prod_{j=0}^{n-1} (b - aq^j)}, \quad i = 0, \dots, n \quad (2.10)$$

ile tanımlanır. Burada  $b - aq^j \neq 0$  ( $1 \leq j \leq n - 1$ ) ve  $n > 0$  çift sayısı için  $q \neq -1$  dir (Simeonov vd. 2010).

Şimdi  $[a, b]$  aralığındaki  $q$ -Bernstein taban fonksiyonları için bazı özel durumları inceleyelim. (2.10) eşitliğinde;

i)  $a = 0$  ve  $b = 1$  alındığında  $B_i^n(t; [a, b]; q)$ ,  $[0, 1]$  aralığındaki  $q$ -Bernstein taban fonksiyonuna indirgenir.

ii) Keyfi  $a < 1$  ve  $b = 1$  alındığında Lewanowicz ve Wozny tarafından çalışılan  $q$ -Bernstein taban fonksiyonları elde edilir (Lewanowicz ve Wozny 2004). Bu fonksiyonlar  $q, w \in \mathbb{R}$ ,  $q \neq 1$ ,  $w \neq 1, q^{-1}, \dots, q^{1-n}$  ve  $u = w + (1 - w)t$  olmak üzere

$$B_i^n(u; w|q) = \frac{1}{(w; q)_n} \left[ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right]_q t^i (wt^{-1}; q)_i (t; q)_{n-i}, \quad i = 0, \dots, n$$

dir. Bu taban fonksiyonlarının bir diğer formu da

$$B_i^n(t; w|q) = \frac{1}{(w; q)_n} \left[ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right]_q \prod_{j=0}^{i-1} (t - wq^j) \prod_{k=0}^{n-i-1} (1 - tq^k), \quad 0 \leq q, w \leq 1$$

$$(w; q)_n = \prod_{j=0}^{n-1} (1 - q^j w)$$

şeklindedir.

$$B_i^n(t; q) = \left[ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right]_q t^i (t; q)_{n-i} = \left[ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right]_q t^i \prod_{j=0}^{n-1} (1 - q^j t)$$

$w = a < 1$  ve  $b = 1$  alındığında  $B_i^n(t; a|q) = B_i^n(t; [a, b]; q)$  bulunur.

iii)  $b = aq^n$  alındığında  $B_i^n(t; [a, b]; q)$  düğümleri  $a, aq, \dots, aq^n$  olan  $n$ -inci dereceden Lagrange taban fonksiyonlarına indirgenir.

Düğümleri  $t_0, \dots, t_n$  olan  $n$ -inci dereceden Lagrange taban fonksiyonları

$$L_k^n(t|t_0, \dots, t_n) = \frac{\prod_{j \neq k} (t - t_j)}{\prod_{j \neq k} (t_k - t_j)}, \quad k = 0, \dots, n$$

şeklindedir.  $b = aq^n$  için

$$B_i^n(t; [a, aq^n]; q) = \binom{n}{i}_q \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (t - aq^j) \prod_{j=0}^{n-i-1} (aq^n - tq^j)}{\prod_{j=0}^{n-1} (aq^n - aq^j)}, \quad i = 0, \dots, n$$

eşitliğinde  $q$ -binom katsayısının açık ifadesi

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \dots (q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1)(q^{k-1} - 1) \dots (q - 1)}$$

kullanılırsa  $L_k^n(t|a, aq, \dots, aq^n)$ ,  $k = 0, \dots, n$  Lagrange taban fonksiyonları bulunur.

iv)  $q = 1$  alındığında  $[a, b]$  aralığındaki

$$B_i^n(t; [a, b]; 1) = \binom{n}{i} \frac{(t - a)^i (b - t)^{n-i}}{(b - a)^n}, \quad i = 0, \dots, n$$

standart Bernstein taban fonksiyonları elde edilir ve bu fonksiyonlar için

$$1 = \left( \frac{t - a}{b - a} + \frac{b - t}{b - a} \right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(t - a)^k (b - t)^{n-k}}{(b - a)^n}$$

eşitliği gerçekleşir.

v)  $t = q^{-\frac{x}{h}}$ ,  $a = q^{-\frac{\alpha}{h}}$ ,  $b = q^{-\frac{\beta}{h}}$  ve  $q \rightarrow 1$  için  $[a, b]$  üzerindeki  $t$  parametrelili  $q$ -Bernstein taban fonksiyonları  $[\alpha, \beta]$  üzerindeki  $x$  parametrelili  $h$ -Bernstein taban fonksiyonlarına döndür (Simeonov vd. 2010).

$$\begin{aligned}
& \text{Gerçekten } \lim_{q \rightarrow 1} B_i^n \left( q^{-\frac{x}{h}}; \left[ q^{-\frac{\alpha}{h}}, q^{-\frac{\beta}{h}} \right]; q \right) \\
&= \frac{\lim_{q \rightarrow 1} \prod_{j=0}^{i-1} q^{-\frac{x}{h}} \left( 1 - q^{j-\frac{\alpha}{h}+\frac{x}{h}} \right) \prod_{j=0}^{n-i-1} q^{-\frac{\beta}{h}} \left( 1 - q^{j-\frac{x}{h}+\frac{\beta}{h}} \right)}{\prod_{j=0}^{n-1} q^{-\frac{\beta}{h}} \left( 1 - q^{j-\frac{\alpha}{h}+\frac{\beta}{h}} \right)} \\
&= \frac{\lim_{q \rightarrow 1} \left( q^{-\frac{x}{h}} \right)^i \left( q^{-\frac{\beta}{h}} \right)^{n-i} \prod_{j=0}^{i-1} \left( 1 - q^{j-\frac{\alpha}{h}+\frac{x}{h}} \right) \prod_{j=0}^{n-i-1} \left( 1 - q^{j-\frac{x}{h}+\frac{\beta}{h}} \right)}{\left( q^{-\frac{\beta}{h}} \right)^n \lim_{q \rightarrow 1} \prod_{j=0}^{n-1} \left( 1 - q^{j-\frac{\alpha}{h}+\frac{\beta}{h}} \right)} \\
&= \frac{\lim_{q \rightarrow 1} q^{-i\left(\frac{x}{h}-\frac{\beta}{h}\right)} \lim_{q \rightarrow 1} \prod_{j=0}^{i-1} \left( 1 - q^{j-\frac{\alpha}{h}+\frac{x}{h}} \right) \prod_{j=0}^{n-i-1} \left( 1 - q^{j-\frac{x}{h}+\frac{\beta}{h}} \right)}{\prod_{j=0}^{n-1} \left( 1 - q^{j-\frac{\alpha}{h}+\frac{\beta}{h}} \right)} \\
&= \frac{\lim_{q \rightarrow 1} \prod_{j=0}^{i-1} \left[ - \left( j - \frac{\alpha}{h} + \frac{x}{h} \right) \right] q^{j-\frac{\alpha}{h}+\frac{x}{h}-1} \prod_{j=0}^{n-i-1} \left[ - \left( j - \frac{\alpha}{h} + \frac{\beta}{h} \right) \right] q^{j-\frac{x}{h}+\frac{\beta}{h}-1}}{\lim_{q \rightarrow 1} \prod_{j=0}^{n-1} \left[ - \left( j - \frac{\alpha}{h} + \frac{\beta}{h} \right) \right] q^{j-\frac{\alpha}{h}+\frac{\beta}{h}-1}} \\
&= \frac{\prod_{j=0}^{i-1} \lim_{q \rightarrow 1} (-1)^i \left( \frac{jh-\alpha+x}{h} \right) q^{j-\frac{\alpha}{h}+\frac{x}{h}-1} \prod_{j=0}^{n-i-1} (-1)^{n-i} \lim_{q \rightarrow 1} \left( \frac{jh-x+\beta}{h} \right) q^{j-\frac{x}{h}+\frac{\beta}{h}-1}}{\prod_{j=0}^{n-1} \lim_{q \rightarrow 1} (-1)^n \left( \frac{jh-\alpha+\beta}{h} \right) q^{j-\frac{\alpha}{h}+\frac{\beta}{h}-1}} \\
&= \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (jh - \alpha + x) + \prod_{j=0}^{n-i-1} (jh - x + \beta)}{\prod_{j=0}^{n-1} (jh - \alpha + \beta)}
\end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir.

**Önerme 2.3.2**  $c > 0$  sayısı için

$$B_i^n(ct; [ca, cb]; q) = B_i^n(t; [a, b]; q)$$

dir.

**İspat.**  $B_i^n(t; [a, b]; q)$ ,  $q$ -Bernstein taban fonksiyonu tanımından

$$\begin{aligned} B_i^n(ct; [ca, cb]; q) &= \binom{n}{i}_q \frac{c^i \prod_{j=0}^{i-1} (t - aq^j) c^{n-i} \prod_{j=0}^{n-i-1} (b - tq^j)}{c^n \prod_{j=0}^{n-1} (b - aq^j)} \\ &= B_i^n(t; [a, b]; q) \end{aligned}$$

elde edilir.

**Uyarı 2.3.1**  $c > 0$  için

$$B_i^n(t + c; [c + a, c + b]; q) \neq B_i^n(t; [a, b]; q)$$

dir.

**Önerme 2.3.3 (İndirgeme bağıntısı)**  $q$ -Bernstein taban fonksiyonları için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\begin{aligned} B_i^n(t; q) &= (1 - tq^{n-i-1}) B_i^{n-1}(t; q) + tq^{n-i} B_{i-1}^{n-1}(t; q) \\ B_i^n(t; q) &= q^i (1 - tq^{n-i-1}) B_i^{n-1}(t; q) + t B_{i-1}^{n-1}(t; q) \end{aligned}$$

**İspat.**

$$B_i^{n-1}(t; q) = \binom{n-1}{i}_q t^i \prod_{s=0}^{n-i-2} (1 - q^s t)$$

ve

$$B_{i-1}^{n-1}(t; q) = \binom{n-1}{i-1}_q t^{i-1} \prod_{s=0}^{n-i-1} (1 - q^s t)$$

taban fonksiyonları açılımları ve

$$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix}_q + q^{n-i} \begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix}_q + q^i \begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix}$$

Pascal özdeşlikleri dikkate alınırsa istenilen elde edilir.

**Önerme 2.3.4** ( *$[a, b]$  üzerindeki indirgeme bağıntısı*)  $[a, b]$  aralığındaki  $q$ -Bernstein taban fonksiyonları için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$B_i^n(t; [a, b]; q) = \left( \frac{b - tq^{n-i-1}}{b - aq^{n-1}} \right) B_i^{n-1}(t; [a, b]; q) + q^{n-i} \left( \frac{t - aq^{i-1}}{b - aq^{n-1}} \right) B_{i-1}^{n-1}(t; [a, b]; q)$$

ve

$$B_i^n(t; [a, b]; q) = q^i \left( \frac{b - tq^{n-i-1}}{b - aq^{n-1}} \right) B_i^{n-1}(t; [a, b]; q) + \left( \frac{t - aq^{i-1}}{b - aq^{n-1}} \right) B_{i-1}^{n-1}(t; [a, b]; q)$$

**İspat.** Önerme 2.3.3 ispatına benzer olarak

$$B_i^{n-1}(t; [a, b]; q) = \begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix}_q \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (t - aq^j) \prod_{j=0}^{n-i-2} (b - tq^j)}{\prod_{j=0}^{n-2} (b - aq^j)}$$

ve

$$B_{i-1}^{n-1}(t; [a, b]; q) = \begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix}_q \frac{\prod_{j=0}^{i-2} (t - aq^j) \prod_{j=0}^{n-i-1} (b - tq^j)}{\prod_{j=0}^{n-2} (b - aq^j)}$$

taban fonksiyonları açılımları ve

$$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix}_q + q^{n-i} \begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix}_q + q^i \begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix}$$

Pascal özdeşlikleri dikkate alınrsa istenilen bağıntılar elde edilir.



### 3. BEZIER ve $q$ -BEZIER EĞRİLERİ

Bu bölümde Bézier eğrileri, özellikleri ve bu eğrileri oluşturmada kullanılacak olan *Casteljau* algoritması verilip önceki bölümde verilen Bernstein taban fonksiyonlarının tek ekstremuma sahip olması özelliğinin Bézier eğrileri üzerinde nasıl bir etkiye sahip olduğu bir örnek üzerinde gösterilecektir. Ardından  $q$ -Bézier eğrileri, genel özellikleri ve  $q$  parametresinin bu eğriler üzerindeki etkisi örneklerle incelenecektir.

$n$ -inci dereceden bir Bézier eğrisini kendisini tanımlayacak olan  $\mathbf{P}_k \in \mathbb{R}^2$ ,  $k = 0, \dots, n$  kontrol noktalarının oluşturduğu kontrol çokgeni belirler. Bu çokgenin sadece ilk ve son köşeleri eğri üzerinde bulunup diğer köşeler eğrinin derecesini dolayısıyla şeklini belirlemeye yardımcı olurlar.

#### 3.1 Bézier Eğrileri

**Tanım 3.1.1** (*Bir Bézier eğrisinin parametrik denklemi*)  $n$ -inci dereceden bir Bézier eğrisi,  $\mathbf{P}_k = (x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$ ,  $k = 0, \dots, n$  kontrol (Bézier) noktaları ve

$$B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}, \quad t \in [0, 1], \quad k = 0, \dots, n$$

Bernstein taban fonksiyonları olmak üzere

$$\mathbf{P}(t) = (x(t), y(t)) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}_k B_k^n(t)$$

parametrik denklemi ile tanımlanır. Burada

$$x(t) = \sum_{k=0}^n x_k B_k^n(t), \quad y(t) = \sum_{k=0}^n y_k B_k^n(t)$$

dir.

**Not 3.1.1**  $x_k = \frac{k}{n}$  olmak üzere  $x(t) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} B_k^n(t) = t$  olduğundan

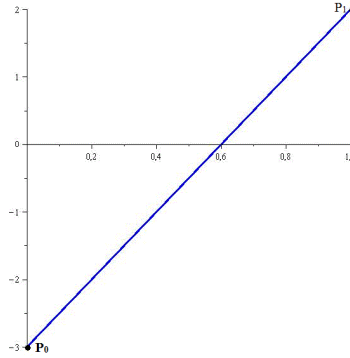
$\mathbf{P}_k = (x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$  kontrol noktalarına sahip  $n$ -inci dereceden Bézier eğrisi

$$P(t) = y(t) = \sum_{k=0}^n y_k B_k^n(t)$$

polinom eğrisidir.

**Tanım 3.1.2 (Lineer Bézier eğrisi)**  $\mathbf{P}_0$  ve  $\mathbf{P}_1$  kontrol noktaları verildiğinde bu iki noktayı birleştiren doğru parçası lineer Bézier eğrisidir.

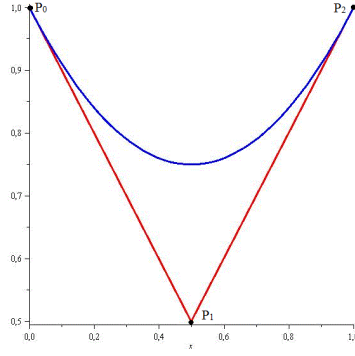
$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= \mathbf{P}_0 + t(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) \\ &= (1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1 \end{aligned}$$



Şekil 3.1 Lineer bir Bézier eğrisi

**Tanım 3.1.3 (Kuadratik Bézier eğrisi)**  $\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1$  ve  $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$  noktalarının oluşturduğu lineer Bézier eğrilerinin birleştirilmesiyle oluşan eğridir.

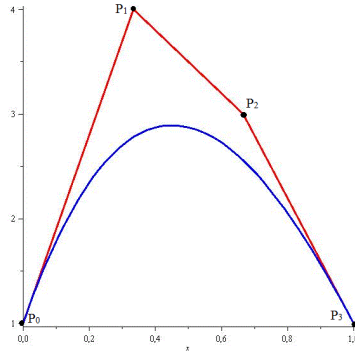
$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= (1-t)[(1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1] + t[(1-t)\mathbf{P}_1 + t\mathbf{P}_2] \\ &= (1-t)\mathbf{Q}_0 + t\mathbf{Q}_1 \end{aligned}$$



Şekil 3.2 Kuadratik bir Bézier eğrisi

**Tanım 3.1.4 (Kübik Bézier eğrisi)**  $P_0 - P_1$ ,  $P_1 - P_2$  ve  $P_2 - P_3$  noktalarına ait lineer Bézier eğrilerinin birleşmesiyle oluşan eğridir.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= (1-t)[(1-t)\mathbf{Q}_0 + t\mathbf{Q}_1] + t[(1-t)\mathbf{Q}_1 + t\mathbf{Q}_2] \\ &= (1-t)\mathbf{R}_0 + t\mathbf{R}_1 \end{aligned}$$



Şekil 3.3 Kübik bir Bézier eğrisi

**Tanım 3.1.5 (Keyfi aralıklar üzerinde tanımlı Bézier eğrileri)**

$$\mathbf{P}(a) = \mathbf{P}_0 \text{ ve } \mathbf{P}(b) = \mathbf{P}_n$$

olacak şekildeki  $t \in [a, b]$  için  $[a, b]$  aralığındaki Bézier eğrisi,  $\mathbf{P}_k = (x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$ ,

$k = 0, \dots, n$  kontrol noktaları ve  $[a, b]$  aralığındaki Bernstein taban fonksiyonu

$$B_k^n(t) = \binom{n}{k} \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k, \quad t \in [a, b], \quad 0 \leq k \leq n$$

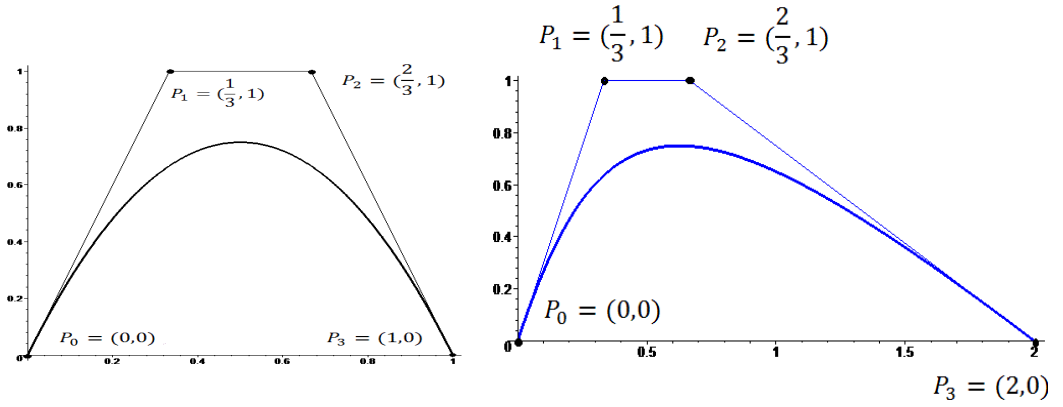
olmak üzere

$$\mathbf{P}_{[a,b]}(t) = (x(t), y(t)) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}_k \binom{n}{k} \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k$$

parametrik denklemi ile tanımlanır. Burada

$$x(t) = \sum_{k=0}^n x_k \binom{n}{k} \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k, \quad y(t) = \sum_{k=0}^n y_k \binom{n}{k} \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k$$

dir.



Şekil 3.4  $[0, 1]$  ve  $[0, 2]$  aralıklarındaki kübik Bézier eğrileri

Şimdi bir örnek ile kontrol noktası değişiminin kuadratik bir Bézier eğrisi üzerindeki etkisini inceleyelim.

### Örnek 3.1.1 Kontrol noktaları

$$\mathbf{P}_0 = (0, 1), \quad \mathbf{P}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \mathbf{P}_2 = (1, 1)$$

olan Bézier eğrisinin  $\mathbf{P}_1$  kontrol noktasını sırayla değiştirelim.

Kontrol noktaları

$$\mathbf{P}_0 = (0, 1), \quad \dot{\mathbf{P}}_1 = \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad \mathbf{P}_2 = (1, 1)$$

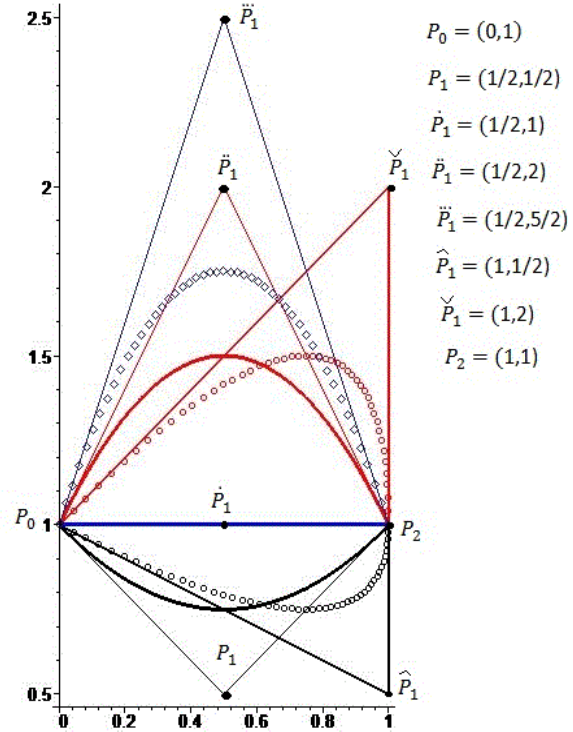
$$\mathbf{P}_0 = (0, 1), \quad \ddot{\mathbf{P}}_1 = \left(\frac{1}{2}, 2\right), \quad \mathbf{P}_2 = (1, 1)$$

$$\mathbf{P}_0 = (0, 1), \quad \ddot{\mathbf{P}}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right), \quad \mathbf{P}_2 = (1, 1)$$

ve

$$\mathbf{P}_0 = (0, 1), \quad \hat{\mathbf{P}}_1 = \left(1, \frac{1}{2}\right), \quad \mathbf{P}_2 = (1, 1)$$

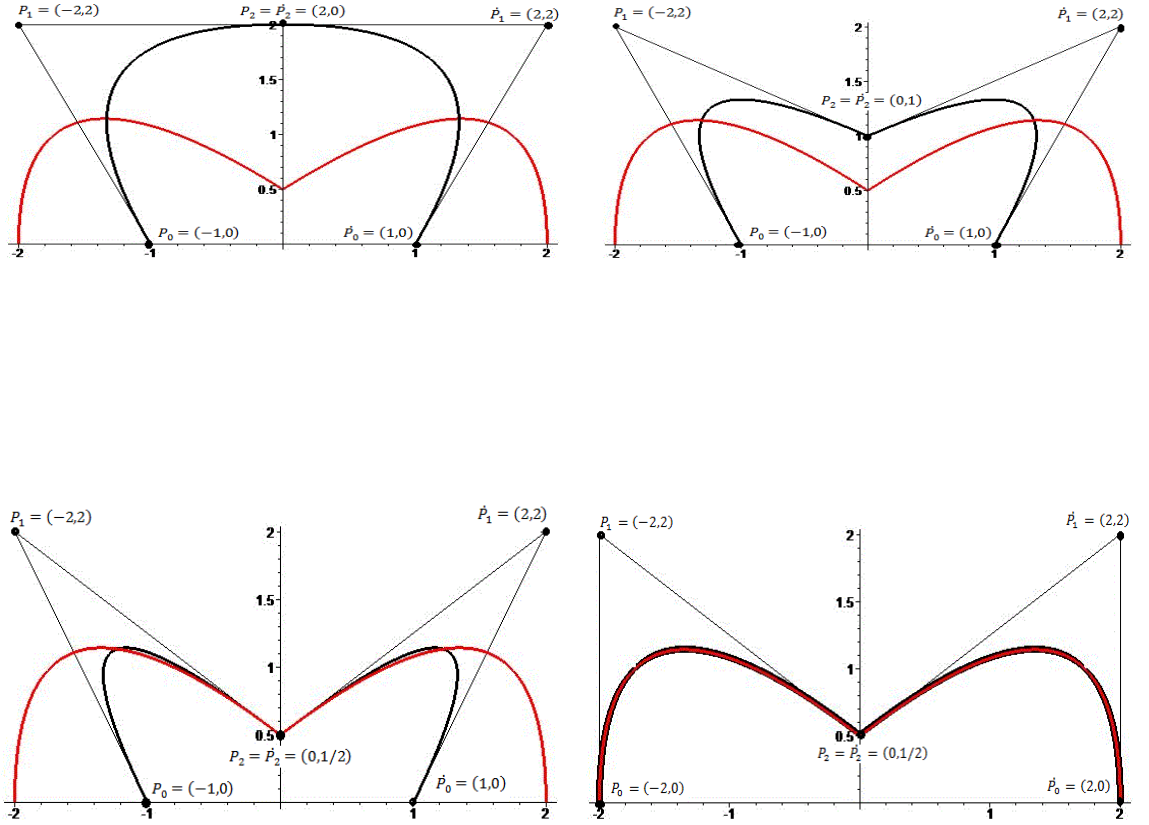
olan kuadratik Bézier eğrileri şekil 3.5'te verilmiştir.



Şekil 3.5  $\mathbf{P}_1$  kontrol noktası değişimi

Şekil 3.5' te görüldüğü gibi kontrol noktalarının herhangi birisi veya birkaçı üzerinde yapılan bir değişiklik Bézier eğrisi üzerinde doğrudan bir etkiye sahiptir.

**Örnek 3.1.2** Kuadratik Bézier eğrilerinin kontrol noktalarının değişimi yardımıyla bir "m" harfi fontunun elde edilmesi şekil 3.6'da verilmiştir.



Şekil 3.6 Kontrol noktası değişimi

### Örnek 3.1.3 Kontrol noktaları

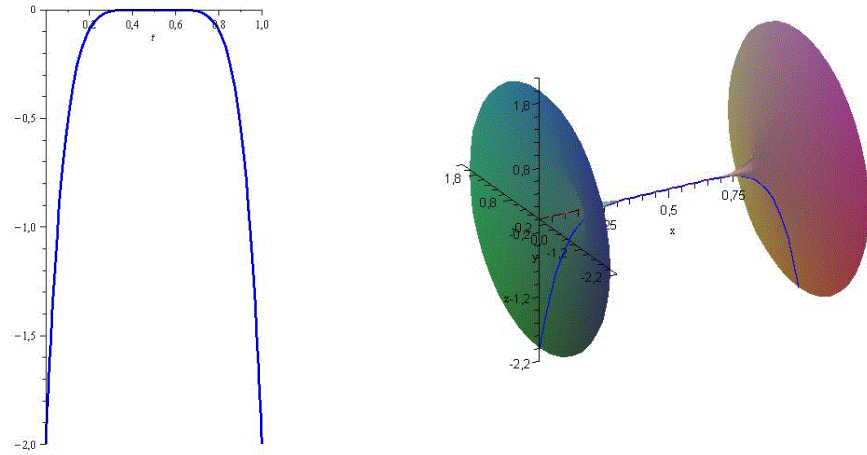
$$\mathbf{P}_0 = (0, -2), \mathbf{P}_1 = (1/6, 2), \mathbf{P}_2 = (2/6, -2)$$

$$\mathbf{P}_3 = (3/6, 2), \mathbf{P}_4 = (4/6, -2), \mathbf{P}_5 = (5/6, 2), \mathbf{P}_6 = (1, -2)$$

olarak belirlenen  $[0, 1]$  aralığındaki 6 -ncı dereceden Bézier eğrisi

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= (x(t), y(t)) \\ &= (t, -2 + 24t - 120t^2 - 480t^4 - 128t^6 + 384t^5 + 320t^3) \end{aligned}$$

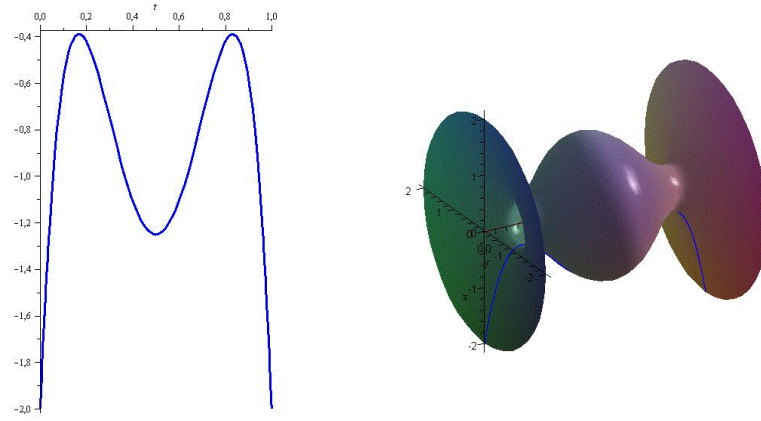
ve  $x$  eksenini etrafında dönmesi ile oluşan dönel cisim Şekil 3.7'de verilmiştir.



Şekil 3.7 Bézier eğrisi ve dönel cisim

$\mathbf{P}_3$  noktası yerine  $(3/6, -2)$  noktası alındığında oluşan Bézier eğrisi ve dönel cisim,

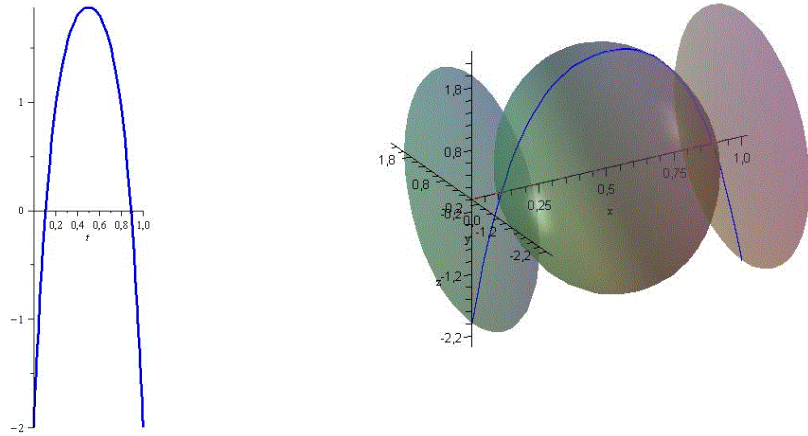
$$\mathbf{P}(t) = (x(t), y(t)) = (t, -2 + 24t + 240t^3 + 144t^5 - 120t^2 - 48t^6)$$



Şekil 3.8  $\mathbf{P}_3$  kontrol noktası değişimi

$\mathbf{P}_2$  ve  $\mathbf{P}_4$  noktaları yerine sırasıyla  $(2/6, 2)$  ve  $(4/6, 2)$  noktaları alındığında oluşan Bézier eğrisi ve döneel cisim

$$\mathbf{P}(t) = (x(t), y(t)) = (t, -2 + 24t + 80t^3 - 60t^4 - 8t^6 + 24t^5 - 60t^2)$$



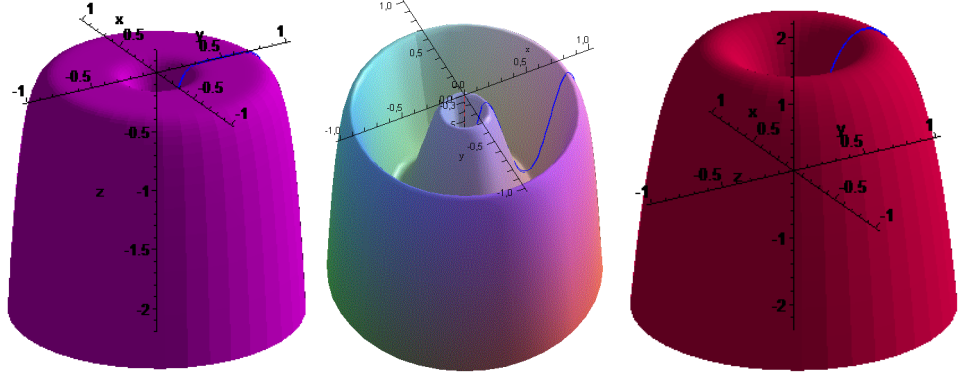
Şekil 3.9  $\mathbf{P}_2$  ve  $\mathbf{P}_4$  kontrol noktası değişimi

sırasıyla şekil 3.8-3.9'da gösterilmiştir.

Yukarıda elde edilen Bézier eğrilerinin  $y$  eksenini etrafında dönmesi ile oluşan döneel



cisimler şekil 3.10'da gösterilmiştir.



Şekil 3.10  $y$  eksenini etrafında dönme

### 3.2 Casteljau Algoritması ve Derece Yükseltme

*Casteljau algoritması* herhangi bir  $[t_0, t_2]$  aralığında tanımlı bir Bézier eğrisini, birleşimleri bu eğriyi verecek şekilde  $[t_0, t_1]$  ve  $[t_1, t_2]$  aralıklarında tanımlı Bézier eğrilerine nasıl böleceğimizi ifade eder. Bu algoritma ile, bölünmüş Bézier eğrisinin tanımlı olduğu aralığın alt aralıklarında yeni Bézier eğrileri elde edilir. Böylece istenilen eğriye bölünmeler ile yaklaşılmış olur.

Derece yükseltme ise eğrinin şeklini değiştirmeden kontrol noktası sayısını artırıp, böylelikle eğri üzerinde daha çok kontrol etme imkanı sağlar.

**Tanım 3.2.1** (*Casteljau algoritması*)  $[t_0, t_2]$  aralığındaki bir Bézier eğrisini  $[t_0, t_1]$  ve  $[t_1, t_2]$  aralıklarında tanımlı Bézier eğrilerine bölmek için kullanılan *Casteljau algoritması*  $\tau = \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0}$  olmak üzere

$$\mathbf{P}_i^j = (1 - \tau) \mathbf{P}_i^{j-1} + \tau \mathbf{P}_{i+1}^{j-1}, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 0, \dots, n - j$$

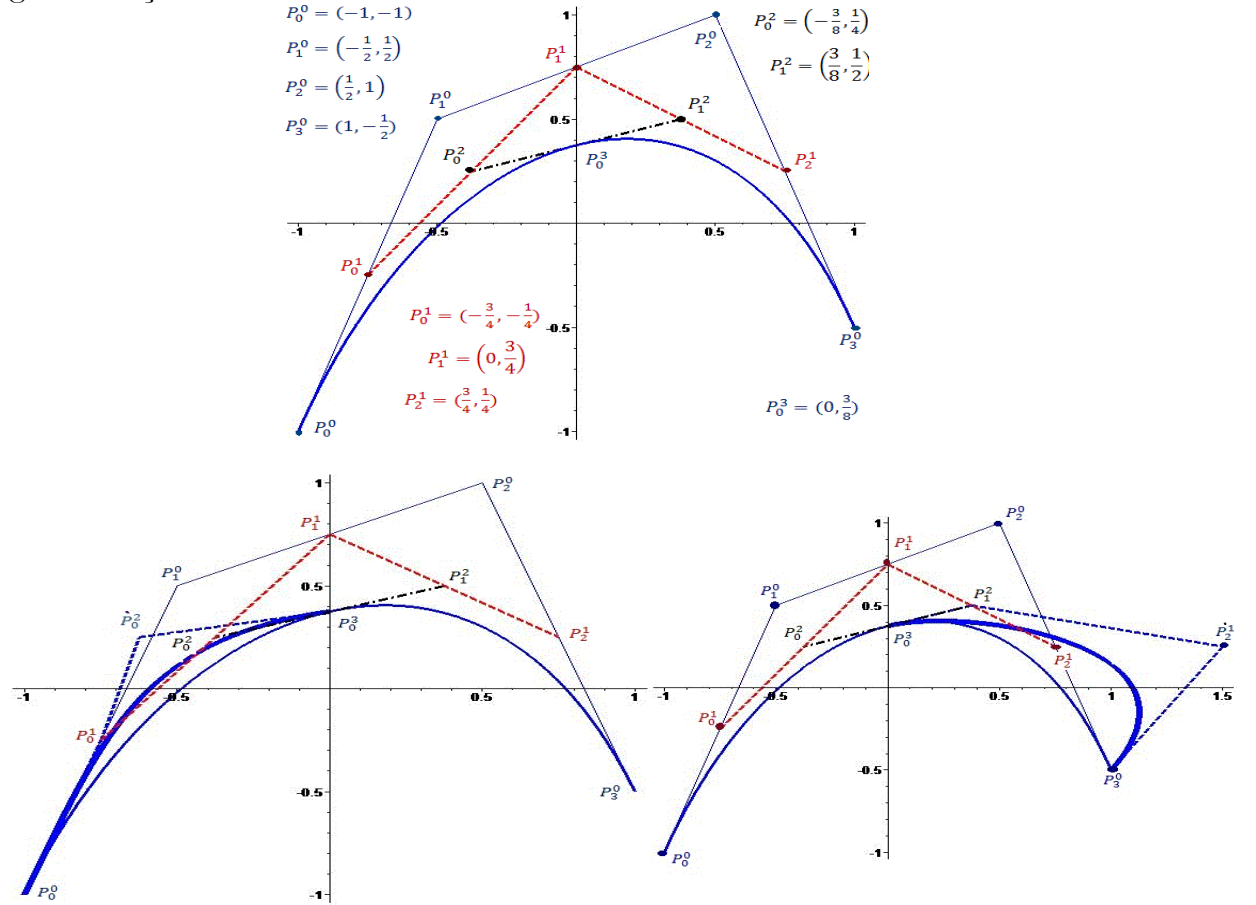
ile verilir.

**Sonuç 3.2.1** *Casteljau* algoritmasına göre  $[t_0, t_1]$  aralığındaki Bézier eğrisi için sol kontrol noktaları  $\mathbf{P}_0^i$ ,  $i = 0, \dots, n$  ve  $[t_1, t_2]$  aralığındaki Bézier eğrisi için sağ kontrol noktaları  $\mathbf{P}_i^{n-i}$ ,  $i = 0, \dots, n$  dir.

**Örnek 3.2.1**  $[-1, 1]$  aralığında tanımlı kübik Bézier eğrisinin kontrol noktalarını

$$\mathbf{P}_0 = (-1, -1), \quad \mathbf{P}_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \mathbf{P}_2 = \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad \mathbf{P}_3 = \left(1, -\frac{1}{2}\right)$$

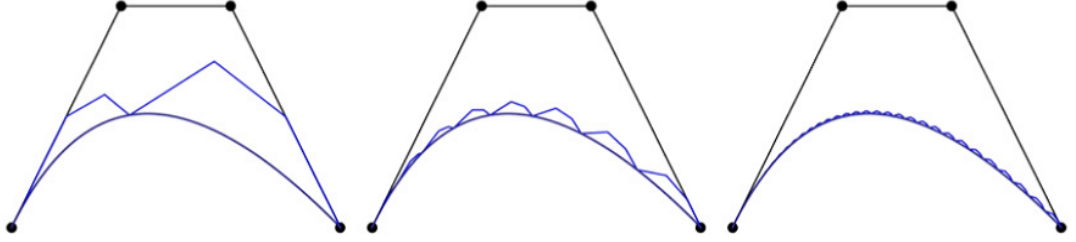
olarak belirleyelim. Bu eğriyi  $[-1, 0]$  ve  $[0, 1]$  aralıklarında tanımlı iki kübik Bézier eğrisine bölmek için uygulanan algoritma sonucu bölünmüş sol ve sağ Bézier eğri-leri ve oluşan noktaların değişimiyle eğri üzerindeki şekil değişikliği şekil 3.11'de gösterilmiştir.



Şekil 3.11 Algoritma ile oluşan yeni kontrol noktaları ve bu noktalar yardımıyla eğri üzerindeki değişim

**Sonuç 3.2.2** *Casteljau algoritması* ile Bézier eğrisinin ardışık olarak bölünmesi sonucunda oluşan kontrol çokgenlerinin eğriye doğru yaklaştığı görülür.

$n$  iterasyon sayısını göstermek üzere  $n = 1$ ,  $n = 3$  ve  $n = 5$  için oluşan  $2^n$  tane Bézier eğrisi ve kontrol çokgenleri şekil 3.12’de gösterilmiştir.



Şekil 3.12 Bölünmüş Bézier eğrileri ve çokgenleri (Simeonov vd. 2010)

**Tanım 3.2.2** (*Derece yükseltme*)  $n$  -inci dereceden bir Bézier eğrisi verildiğinde ona denk olan  $(n + 1)$  -inci dereceden Bézier eğrisi için kontrol noktalarının hesaplanması işlemine derece yükseltme denir.

Böylece  $n$  -inci dereceden bir Bézier eğrisi  $(n + 1)$  -inci dereceden bir Bézier eğrisi olarak ifade edilebilir.

$\mathbf{P}(t)$ ,  $n$  -inci dereceden bir Bézier eğrisi olmak üzere derece yükseltme formülü (2.2) ve (2.3) eşitlikleri kullanılarak şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(t) &= [(1-t) + t] \mathbf{P}(t) \\
&= [(1-t) + t] \sum_{k=0}^n \mathbf{P}_k B_k^n(t) \\
&= \sum_{k=0}^n \mathbf{P}_k \left[ \frac{n-k+1}{n+1} B_k^{n+1}(t) + \frac{k+1}{n+1} B_{k+1}^{n+1}(t) \right] \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{n-k+1}{n+1} \mathbf{P}_k B_k^{n+1}(t) + \frac{k+1}{n+1} \mathbf{P}_k B_{k+1}^{n+1}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left[ \frac{(n+1-k) \mathbf{P}_k + k \mathbf{P}_{k-1}}{n+1} \right] B_k^{n+1}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \mathbf{P}_k^* B_k^{n+1}(t)
\end{aligned}$$

O halde  $\mathbf{P}_k^*$ ,  $k = 0, \dots, n$  derecesi yükseltilmiş Bézier eğrisinin kontrol noktaları olmak üzere

$$\mathbf{P}_k^* = \alpha_k \mathbf{P}_{k-1} + (1 - \alpha_k) \mathbf{P}_k, \quad \alpha_k = \frac{k}{n+1}$$

ile belirlenir.

**Örnek 3.2.2** Kontrol noktaları  $\mathbf{P}_k$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$  olan kübik bir Bézier eğrisinin derecesi yükseltildiğinde yeni  $\mathbf{P}_k^*$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4$  kontrol noktaları önceki kontrol noktaları cinsinden

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_0^* &= \mathbf{P}_0 = (-2, -1) \\
\mathbf{P}_1^* &= \frac{1}{4} \mathbf{P}_0 + \frac{3}{4} \mathbf{P}_1 = \frac{1}{4} (-2, -1) + \frac{3}{4} (-1, 2) = \left( -\frac{5}{4}, \frac{5}{4} \right) \\
\mathbf{P}_2^* &= \frac{1}{2} \mathbf{P}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{P}_2 = \frac{1}{2} (-1, 2) + \frac{1}{2} (1, 2) = (0, 2) \\
\mathbf{P}_3^* &= \frac{3}{4} \mathbf{P}_2 + \frac{1}{4} \mathbf{P}_3 = \frac{3}{4} (1, 2) + \frac{1}{4} (1, -1) = \left( 1, \frac{5}{4} \right) \\
\mathbf{P}_4^* &= \mathbf{P}_3 = (1, -1)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Ayrıca  $\mathbf{P}_2^{**} = (2, 2)$  düzlemde farklı bir nokta olmak üzere 4 kontrol noktası ile belirlenmiş kübik Bézier eğrisinin derecesi yükseltilerek 5 kontrol noktası



ile oluşturulan kübik Bézier eğrisi üzerinde  $\mathbf{P}_1$  kontrol noktası etkisi en fazla olacaktır.

Kontrol noktaları

$$\mathbf{P}_0 = (0, 1), \mathbf{P}_1 = \left(\frac{1}{3}, 4\right), \mathbf{P}_2 = \left(\frac{2}{3}, 3\right), \mathbf{P}_3 = (1, 1)$$

olan Bézier eğrisi

$$P(t) = 3t^3 - 12t^2 + 9t + 1, \quad t \in [0, 1]$$

$\mathbf{P}_1$  kontrol noktası değiştirilirse kontrol noktaları

$$\mathbf{P}_0 = (0, 1), \mathbf{P}_1^* = \left(\frac{1}{3}, 6\right), \mathbf{P}_2 = \left(\frac{2}{3}, 3\right), \mathbf{P}_3 = (1, 1)$$

olan Bézier eğrisi

$$P^1(t) = 9t^3 - 24t^2 + 15t + 1$$

$\mathbf{P}_2$  kontrol noktası değiştirilirse kontrol noktaları

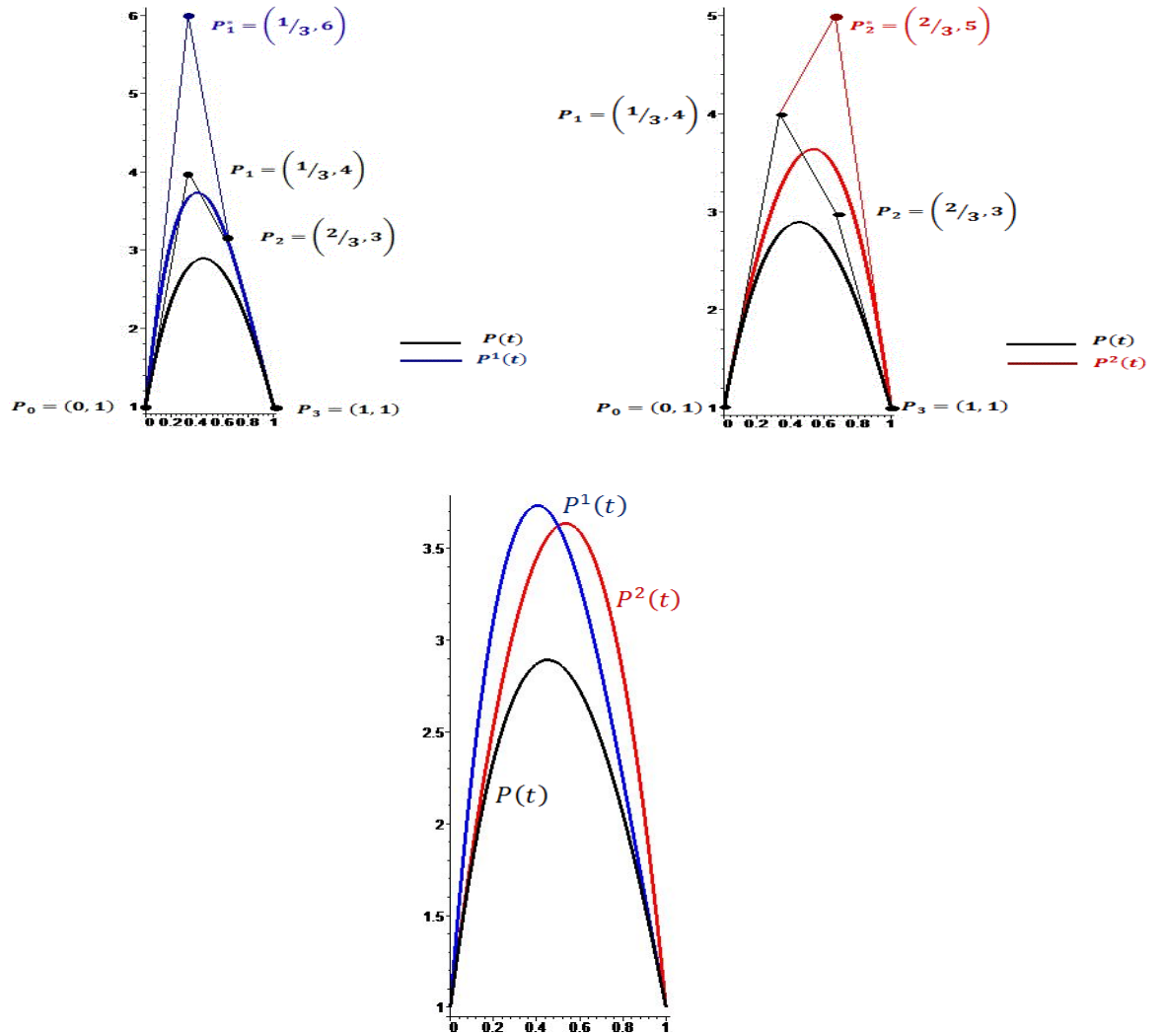
$$\mathbf{P}_0 = (0, 1), \mathbf{P}_1 = \left(\frac{1}{3}, 4\right), \mathbf{P}_2^* = \left(\frac{2}{3}, 5\right), \mathbf{P}_3 = (1, 1)$$

olan Bézier eğrisi

$$P^2(t) = -3t^3 - 6t^2 + 9t + 1$$

dir.

$P$ ,  $P^1$  ve  $P^2$  eğrilerinin grafikleri şekil 3.14'te verilmiştir.



Şekil 3.14  $P$ ,  $P^1$ , ve  $P^2$  Bézier eğrileri

Şekil 3.14'e göre  $t = 0.4$  noktasında eğri üzerinde  $\mathbf{P}_1$  kontrol noktası değişimi ile oluşan etki  $\mathbf{P}_2$  kontrol noktası değişiminden fazladır.

$$P^1(0.4) = 3.74 > 3.50 = P^2(0.4)$$

### 3.3 $q$ -Bézier Eğrileri

Bu bölümde  $q$ -Bézier eğrileri tanımlanacak ve  $q$  parametresi değişiminin  $q$ -Bézier eğrilerinin şeklini nasıl değiştireceği incelenecektir.

**Tanım 3.3.1** ( *$q$ -Bézier eğrisinin parametrik denklemi*)  $n$ -inci dereceden bir  $q$ -Bézier eğrisi  $\mathbf{P}_k = (x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$ ,  $k = 0, \dots, n$  kontrol (Bézier) noktaları ve

$$B_k^n(t; q) = \binom{n}{k}_q t^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s t), \quad t \in [0, 1], \quad k = 0, \dots, n$$

$q$ -Bernstein taban fonksiyonları olmak üzere

$$\mathbf{P}(t) = (x(t), y(t)) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}_k B_k^n(t; q)$$

parametrik denklemi ile tanımlanır. Burada

$$x(t) = \sum_{k=0}^n x_k B_k^n(t; q), \quad y(t) = \sum_{k=0}^n y_k B_k^n(t; q)$$

dir.

**Tanım 3.3.2** (*Keyfi aralıklar üzerinde tanımlı  $q$ -Bézier eğrileri*)

$$\mathbf{P}(a) = \mathbf{P}_0 \text{ ve } \mathbf{P}(b) = \mathbf{P}_n$$

olacak şekildeki  $t \in [a, b]$  için  $[a, b]$  aralığındaki  $q$ -Bézier eğrisi  $\mathbf{P}_k$ ,  $k = 0, \dots, n$  kontrol



noktaları ve  $[a, b]$  aralığındaki  $q$ -Bernstein taban fonksiyonu

$$B_k^n(t; [a, b]; q) = \binom{n}{k}_q \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (t - aq^j) \prod_{j=0}^{n-k-1} (b - tq^j)}{\prod_{j=0}^{n-1} (b - aq^j)}, \quad k = 0, \dots, n$$

olmak üzere

$$\mathbf{P}_{[a,b]}(t) = (x(t), y(t)) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}_k B_k^n(t; [a, b]; q)$$

parametrik denklemi ile tanımlanır. Burada

$$x(t) = \sum_{k=0}^n x_k B_k^n(t; [a, b]; q), \quad y(t) = \sum_{k=0}^n y_k B_k^n(t; [a, b]; q)$$

dir.

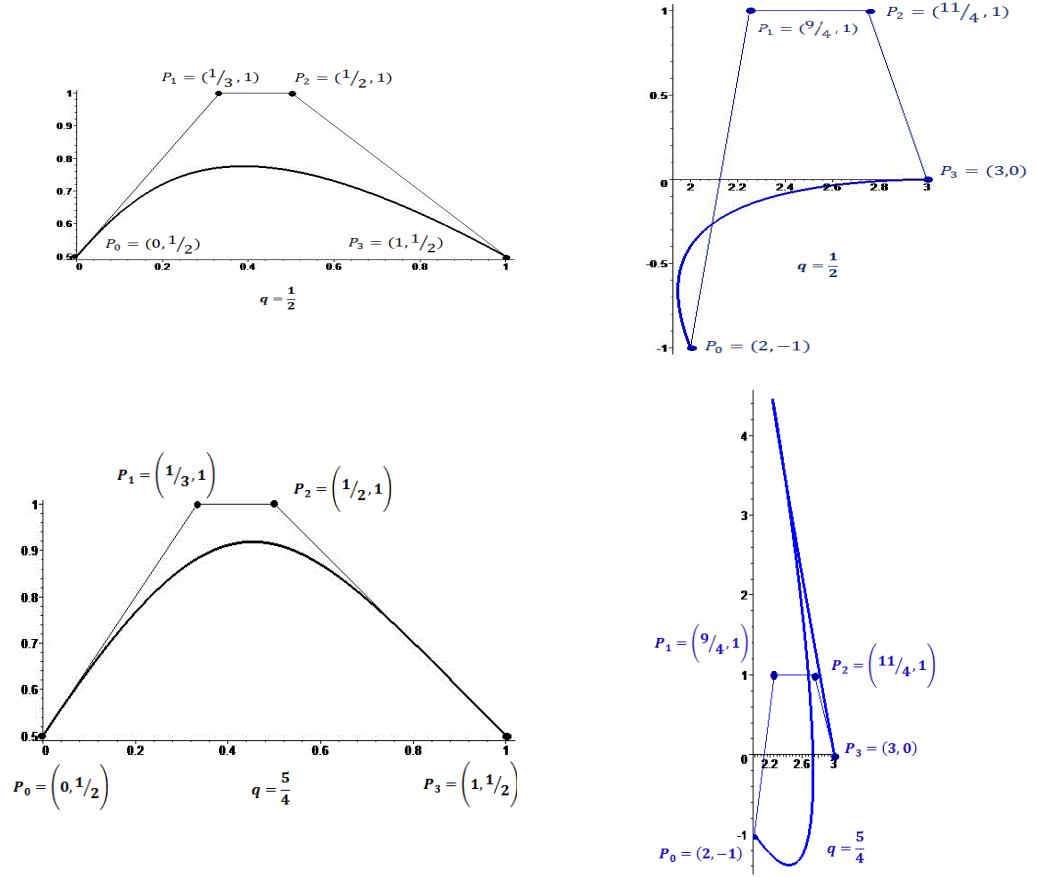
**Örnek 3.2.4**  $q = \frac{1}{2}$  ve  $q = \frac{5}{4}$  değerlerinin,  $[0, 1]$  ve  $[0, 3]$  aralıklarında tanımlı kontrol noktaları sırasıyla

$$\mathbf{P}_0 = \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \mathbf{P}_1 = \left(\frac{1}{3}, 1\right), \quad \mathbf{P}_2 = \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad \mathbf{P}_3 = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

ve

$$\mathbf{P}_0 = (2, -1), \quad \mathbf{P}_1 = \left(\frac{9}{4}, 1\right), \quad \mathbf{P}_2 = \left(\frac{11}{4}, 1\right), \quad \mathbf{P}_3 = (3, 0)$$

olan  $q$ -Bézier eğrilerine etkisi şekil 3.15'te verilmiştir.



Şekil 3.15  $[0, 1]$  ve  $[2, 3]$  aralıklarında tanımlı  $q$ -Bézier eğrileri

### 3.3.1 $q$ -Casteljau algoritması ve $q$ parametresi değişimi

**Tanım 3.3.3 ( $q$ -Casteljau algoritması)**  $[0, 1]$  aralığındaki  $P(t)$   $q$ -Bézier eğrisi için  $q$ -Casteljau algoritması

$$\begin{aligned}\tilde{P}_i^0(t) &= \hat{P}_i^0(t) = P_i, \quad i = 0, \dots, n \\ \tilde{P}_i^k(t) &= (1 - tq^{n-k-i}) \tilde{P}_i^{k-1}(t) + tq^{n-k-i} \tilde{P}_{i+1}^{k-1}(t)\end{aligned}$$

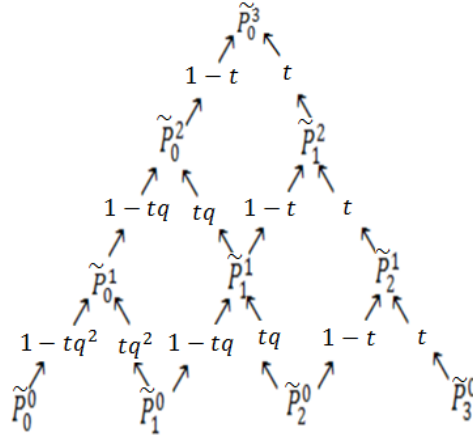
ve

$$\hat{P}_i^k(t) = q^i (1 - tq^{n-k-i}) \hat{P}_i^{k-1}(t) + t \hat{P}_{i+1}^{k-1}(t)$$

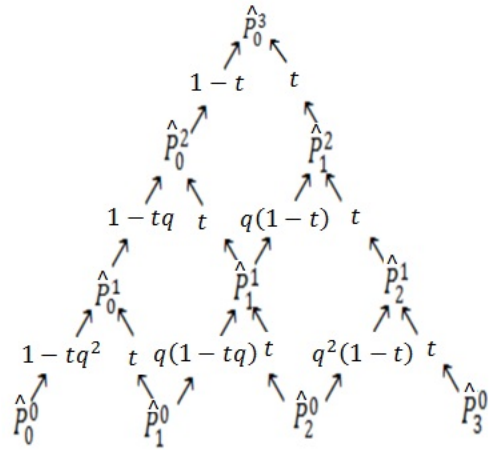
$$i = 0, \dots, n - k; \quad k = 0, \dots, n$$

$$\tilde{P}_0^n(t) = \hat{P}_0^n(t) = P(t)$$

şeklinde ifade edilir. Dikkat edilirse ilk algoritmadaki tüm düğümler  $P_i^k(t)$ ,  $i = 0, \dots, n - k; \quad k = 0, \dots, n$  kendisinden önce gelen düğümlerin afin kombinasyonu durumundadır.



Şekil 3.16  $[0, 1]$  üzerindeki birinci  $q$ -Casteljau algoritması ( $n = 3$ ) (Simeonov vd. 2010)



Şekil 3.17  $[0, 1]$  üzerindeki ikinci  $q$ -Casteljau algoritması ( $n = 3$ ) (Simeonov vd. 2010)

**Tanım 3.3.4** ( $[a, b]$  üzerindeki  $q$ -Casteljau algoritması) Keyfi  $[a, b]$  aralığındaki  $q$ -Bézier eğrisi için  $q$ -Casteljau algoritması

$$\begin{aligned}\tilde{P}_i^0(t) &= \hat{P}_i^0(t) = P_i, \quad i = 0, \dots, n \\ \tilde{P}_i^k(t) &= \left( \frac{b - tq^{n-k-i}}{b - aq^{n-k}} \right) \tilde{P}_i^{k-1}(t) + tq^{n-k-i} \left( \frac{t - aq^i}{b - aq^{n-k}} \right) \tilde{P}_{i+1}^{k-1}(t)\end{aligned}$$

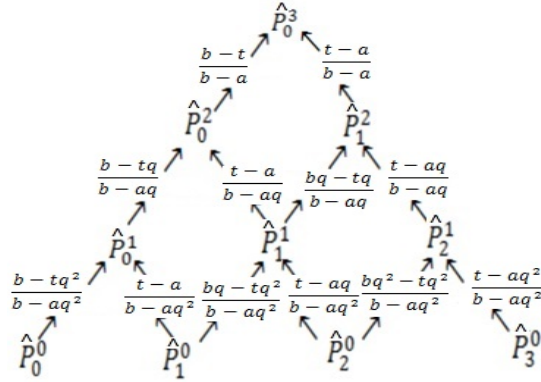
ve

$$\hat{P}_i^k(t) = q^i \left( \frac{b - tq^{n-k-i}}{b - aq^{n-k}} \right) \hat{P}_i^{k-1}(t) + \left( \frac{t - aq^i}{b - aq^{n-k}} \right) \hat{P}_{i+1}^{k-1}(t)$$

$i = 0, \dots, n - k; \quad k = 0, \dots, n$

$$\tilde{P}_0^n(t) = \hat{P}_0^n(t) = P(t)$$

ile ifade edilir.



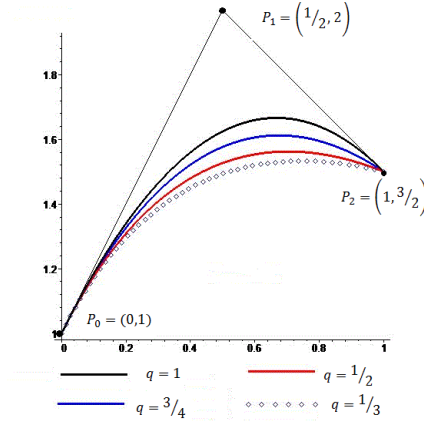
Şekil 3.18  $[a, b]$  üzerindeki ikinci  $q$ -Casteljau algoritması ( $n = 3$ ) (Simeonov vd. 2010)

Şimdi  $q$  parametresi değişiminin  $q$ -Bézier eğrisi üzerinde nasıl şekil değişikliği oluşturacağını bir örnek ile gösterelim.

**Örnek 3.3.1**  $q = 1, 3/4, 1/3$  ve  $1/2$  değerlerinin kontrol noktaları

$$\mathbf{P}_0 = (0, 1), \mathbf{P}_1 = (1/2, 2) \text{ ve } \mathbf{P}_2 = (1, 1)$$

ile verilen  $q$ -Bézier eğrisine etkisi şekil 3.19'da verilmiştir.



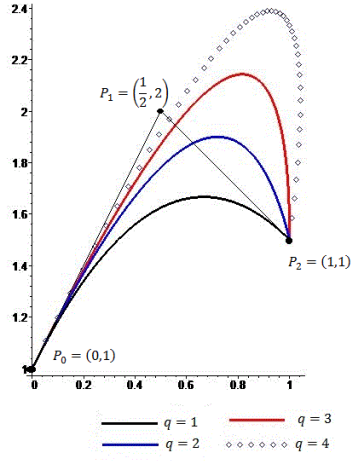
Şekil 3.19  $0 < q \leq 1$  için  $q$  parametresi değişimi

$0 < q < 1$  için,  $q$  değeri arttıkça kuadratik Bézier eğrileri  $q = 1$  değeri için verilen Bézier eğrisine doğru yaklaşmaktadır.

$q = 2, 3, 4$  değerlerinin kontrol noktaları

$$\mathbf{P}_0 = (0, 1), \mathbf{P}_1 = (1/2, 2) \text{ ve } \mathbf{P}_2 = (1, 1)$$

ile verilen  $q$ -Bézier eğrisine etkisi şekil 3.20'de verilmiştir.



Şekil 3.20  $q \geq 1$  için  $q$  parametresi değişimi

$q > 1$  için,  $q$  değeri arttıkça oluşan kuadratik Bézier eğrileri  $q = 1$  değeri için verilen Bézier eğrisinden uzaklaşmaktadır.

## 4. $q$ -TOMURCUK FONKSİYONU

Bu bölümde  $q$ -tomurcuk fonksiyonu tanımlanarak, polinomların  $q$ -tomurcuk fonksiyonunun ifadesi verilecektir. Sonrasında  $q$ -Bézier eğrilerinin sahip olduğu birçok özellik ve  $q$ -Casteljau algoritması  $q$ -tomurcuk fonksiyonu yardımıyla ifade edilip  $q$ -Bernstein taban fonksiyonları için bilinen bazı eşitlikler  $q$ -tomurcuk fonksiyonundan yararlanılarak ispat edilecektir.

**Tanım 4.1** ( *$q$ -Tomurcuk fonksiyonu*)  $n$ -inci dereceden bir  $P(t)$  polinomunun simetrik, çok lineer ve  $q$ -diagonal özelliğine sahip çok değişkenli  $p(u_1, u_2, \dots, u_n; q)$  fonksiyonuna bu polinomun  $q$ -tomurcuk fonksiyonu denir.

$q = 1$  için klasik tomurcuk fonksiyonu elde edilir (Simeonov vd. 2010).

### 4.1 $q$ -Tomurcuk Fonksiyonu ve Aksiyomları

#### 1. (*Simetri*)

$\sigma$  ifadesi,  $\{1, \dots, n\}$  kümesinin her türlü permütasyonu olmak üzere

$$p(u_1, \dots, u_n; q) = p(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)}; q)$$

olup  $q$ -tomurcuk fonksiyonunun değeri değişkenlerin sıralanışı ile değişmez.

#### 2. (*Çok lineerlik*)

$u_k = (1 - \alpha)v_k + \alpha w_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  olmak üzere

$$p(u_1, \dots, (1 - \alpha)v_k + \alpha w_k, \dots, u_n; q) = (1 - \alpha)p(u_1, \dots, v_k, \dots, u_n) + \alpha p(u_1, \dots, w_k, \dots, u_n)$$

dir.

### 3. ( $q$ -Diagonal)

$u_k = tq^{k-1}$ ,  $k = 1, \dots, n$  için

$$P(t) = p(t, tq, \dots, tq^{n-1}; q)$$

dir (Simeonov vd. 2010).

**Örnek 4.1.1**  $\{1, t, t^2, t^3\}$  kübik polinomları için  $q$ -tomurcuk fonksiyonları

$$P(t) = 1 \Rightarrow p(u_1, u_2, u_3; q) = 1$$

$$P(t) = t \Rightarrow p(u_1, u_2, u_3; q) = \frac{u_1 + u_2 + u_3}{1 + q + q^2}$$

$$P(t) = t^2 \Rightarrow p(u_1, u_2, u_3; q) = \frac{u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3}{q(1 + q + q^2)}$$

$$P(t) = t^3 \Rightarrow p(u_1, u_2, u_3; q) = \frac{u_1 u_2 u_3}{q^3}$$

şeklindedir. Tomurcuk fonksiyonunun elde edilmesi Önerme 4.1.1' de verilecektir.

Görüldüğü gibi bu fonksiyonlar simetrik, çok lineer ve  $q$ -diagonal özelliklerine sahiptir.

Bu sonuçları kullanarak  $\forall P(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$  şeklindeki kübik polinomların  $q$ -tomurcuk fonksiyonu  $\forall q \neq 0$  için

$$p(u_1, u_2, u_3; q) = a_3 \frac{u_1 u_2 u_3}{q^3} + a_2 \frac{u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3}{q(1 + q + q^2)} + a_1 \frac{u_1 + u_2 + u_3}{1 + q + q^2} + a_0$$

şeklindedir.

Benzer olarak  $\forall t^k$ ,  $k = 0, \dots, n$  için de  $q$ -tomurcuk fonksiyonu bulunarak lineerlik uygulandığında  $n$ -inci dereceden keyfi bir polinomun  $q$ -tomurcuk fonksiyonuna ulaşılır



**Tanım 4.1.1 (Elementer Simetrik Fonksiyon)**  $\{1, \dots, n\}$  kümesinin her  $\{i_1, \dots, i_k\}$  alt kümesi için

$$\varphi_{n,k}(u_1, \dots, u_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} u_{i_1} \dots u_{i_k}$$

fonksiyonuna  $n$  değişkenli  $k$ -ıncı elementer simetrik fonksiyon denir (Simeonov vd. 2010).

**Önerme 4.1.1**  $M_k^n(t) = t^k$ ,  $k = 0, \dots, n$  polinomunun  $q$ -tomurcuk fonksiyonu

$$m_k^n(u_1, \dots, u_n; q) = \frac{\varphi_{n,k}(u_1, \dots, u_n)}{\varphi_{n,k}(1, q, \dots, q^{n-1})}, \quad \varphi_{n,k}(1, q, \dots, q^{n-1}) \neq 0$$

şeklindedir.

**İspat.**  $m_k^n(u_1, \dots, u_n; q)$  nin  $M_k^n(t)$  nin  $q$ -tomurcuk fonksiyonu olabilmesi için  $q$ -tomurcuk fonksiyonu aksiyomlarını sağlaması gerekir.

$m_k^n(u_1, \dots, u_n; q)$  simetriktir. Çünkü,  $\varphi_{n,k}(u_1, \dots, u_n)$  elementer simetrik fonksiyonu  $\varphi_{n,k}(1, q, \dots, q^{n-1})$  sabiti ile bölünmüştür.

$m_k^n(u_1, \dots, u_n; q)$  çok lineerdir.  $\varphi_{n,k}(u_1, \dots, u_n)$  elementer simetrik fonksiyonu  $k$ -ıncı dereceden homojendir. Yani

$$\begin{aligned} \varphi_{n,k}(tu_1, \dots, tu_n) &= \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} tu_{i_1} \dots tu_{i_k} \\ &= t^k \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} u_{i_1} \dots u_{i_k} \\ &= t^k \varphi_{n,k}(u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca

$$\begin{aligned} m_k^n(t, tq, \dots, tq^{n-1}; q) &= \frac{\varphi_{n,k}(t, tq, \dots, tq^{n-1}; q)}{\varphi_{n,k}(1, q, \dots, q^{n-1}; q)} \\ &= \frac{t^k \varphi_{n,k}(1, q, \dots, q^{n-1}; q)}{\varphi_{n,k}(1, q, \dots, q^{n-1}; q)} \end{aligned}$$

$$= t^k$$

$$= M_k^n(t)$$

olup  $q$ -diagonal özelliği sağlanır.

Bu önerme ileride keyfi bir polinomun  $q$ -tomurcuk fonksiyonunun varlığı gösterilirken kullanılacaktır.

Lemma 4.1.1' den sonra bir polinomun  $q$ -tomurcuk fonksiyonunun var olması için  $(\varphi_{n,k}(1, q, \dots, q^{n-1}; q) \neq 0)$   $q$  üzerine bazı kısıtlamalar getireceğiz.

**Lemma 4.1.1**  $\varphi_{n,k}$  simetrik fonksiyonu için

$$\varphi_{n,k}(1, q, \dots, q^{n-1}; q) = q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q, \quad k = 1, \dots, n$$

eşitliği sağlanır.

**İspat.** Bu eşitliği  $n$  üzerinden tümevarım yöntemiyle gösterelim.

$n = 1$  için

$$\varphi_{1,k}(1) = 1$$

ve

$$q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}_q = 1$$

olup eşitlik sağlanır.

Eşitlik  $n$  için doğru olsun. Yani

$$\varphi_{n,k}(1, q, \dots, q^{n-1}; q) = q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$$

eşitliği sağlansın. Şimdi

$$\varphi_{n+1,k}(1, q, \dots, q^n; q) = q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim. Bunun için

$\varphi_{n+1,k}(u_1, \dots, u_{n+1}) = \varphi_{n,k}(u_1, \dots, u_n) + u_{n+1}\varphi_{n,k-1}(u_1, \dots, u_n)$  eşitliğini ve  $q$ -binom katsayıları için Pascal özdeşliklerini uygulayalım.

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1,k}(1, q, \dots, q^n) &= \varphi_{n,k}(1, q, \dots, q^{n-1}) + q^n \varphi_{n,k-1}(1, q, \dots, q^{n-1}) \\ &= q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + q^n q^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q \\ &= q^{\frac{k(k-1)}{2}} \left\{ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q \right\} \\ &= q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

#### Sonuç 4.1.1

$$\begin{aligned} \varphi_{n,k}(1, q, \dots, q^{n-1}) = 0 &\Leftrightarrow \quad i) \quad q = 0 \text{ ve } n > 1, \quad k > 1 \\ &\quad ii) \quad q = -1 \text{ ve } n \text{ çift, } k \text{ tek} \end{aligned}$$

olduğundan  $q$ -tomurcuk fonksiyonunun tanımlı olabilmesi için  $q$  üzerine şu kısıtlamaları getireceğiz:

$\forall q \in \mathbb{R}$  için

$$\begin{aligned} \forall n > 1 \text{ için} \quad & , \quad q \neq 0 \\ \forall n > 1 \text{ çift sayısı için,} \quad & q \neq -1 \end{aligned}$$

(Simeonov vd. 2010).

**Teorem 4.1.1** ( *$q$ -Tomurcuk fonksiyonunun varlığı ve tekliliği*)  $n$ -inci dereceden her polinomun kendisine indirgenebilen bir tek  $q$ -tomurcuk fonksiyonu vardır.

**İspat.** Önerme 4.1.1 ile  $q$  üzerindeki standart kısıtlamalar altında  $M_k^n(t) = t^k$ ,  $k = 0, \dots, n$  için  $q$ -tomurcuk fonksiyonunun olduğunu göstermiştik.

Her polinom  $M_k^n(t) = t^k$ ,  $k = 0, \dots, n$  fonksiyonlarının lineer kombinasyonu olarak yazılabildiğinden ve bu fonksiyonların  $q$ -tomurcuk fonksiyonlarının toplamı yine  $q$ -tomurcuk fonksiyonu olduğundan,  $q$  üzerindeki standart kısıtlamalar altında her polinomun  $q$ -tomurcuk fonksiyonunun var olduğu kolaylıkla görülür.

Şimdi  $q$ -tomurcuk fonksiyonunun bir tek olduğunu gösterelim.

Kabul edelim ki  $n$ -inci dereceden bir  $P(t)$  polinomunun  $p(u_1, \dots, u_n; q)$  ve  $r(u_1, \dots, u_n; q)$  olmak üzere iki farklı  $q$ -tomurcuk fonksiyonu olsun.

$n$ -inci dereceden her simetrik, çok lineer polinomun  $n$ -inci dereceden  $n + 1$  tane elementer simetrik fonksiyon cinsinden bir tek gösterimi vardır. Buna göre

$a_0, \dots, a_n$  ve  $b_0, \dots, b_n$  sabitler olmak üzere

$$p(u_1, \dots, u_n; q) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_{n,k}(u_1, \dots, u_n; q)$$

ve

$$r(u_1, \dots, u_n; q) = \sum_{k=0}^n b_k \varphi_{n,k}(u_1, \dots, u_n; q)$$

eşitlikleri yazılır. Burada,  $q$ -tomurcuk fonksiyonunun  $q$ -diagonal özelliğini uygulanırsa;

$u_i = tq^{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$  için

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{k=0}^n a_k \varphi_{n,k}(t, tq, \dots, tq^{n-1}; q) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k t^k \varphi_{n,k}(1, q, \dots, q^{n-1}; q) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{k=0}^n b_k \varphi_{n,k}(t, tq, \dots, tq^{n-1}; q) \\ &= \sum_{k=0}^n b_k t^k \varphi_{n,k}(1, q, \dots, q^{n-1}; q) \end{aligned}$$

olup  $k = 0, \dots, n$  için  $a_k = b_k$  dır. Dolayısıyla

$$p(u_1, \dots, u_n; q) = r(u_1, \dots, u_n; q)$$

eşitliği elde edilir. Bu da  $P(t)$  polinomunun  $q$ -tomurcuk fonksiyonunun bir tek olduğunu gösterir.

**Sonuç 4.1.2**  $P(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$  polinomunun  $q$ -tomurcuk fonksiyonu

$$p(u_1, \dots, u_n; q) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{\varphi_{n,k}(u_1, \dots, u_n; q)}{q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q}$$

ile tanımlıdır.

## 4.2 $q$ -Bézier Eğrilerinin Bazı Özelliklerinin $q$ -Tomurcuk Fonksiyonu Yardımıyla Elde Edilmesi

**Teorem 4.2.1**  $P(t)$  polinomu,  $q$ -tomurcuk fonksiyonu  $p(u_1, \dots, u_n; q)$  olan  $n$ -inci dereceden bir polinom olsun. Bu durumda  $t \in [0, 1]$  olmak üzere  $P(t)$  polinomu  $P_i = p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{i-1}; q)$ ,  $i = 0, \dots, n$  kontrol noktaları ile  $q$ -Casteljau algoritması ile oluşturulur.

**İspat.**  $P(t)$   $n$  -inci dereceden bir polinom ve  $p(u_1, \dots, u_n; q)$  da  $P(t)$  polinomunun  $q$ -tomurcuk fonksiyonu olsun.

$P_i = \tilde{P}_i^0(t) = p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{i-1}; q)$ ,  $i = 0, \dots, n$  alınıp birinci  $q$ -Casteljaou algoritması uygulandığında

$$\tilde{P}_0^n(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t; q)$$

$q$ -Bézier eğrisi elde edilir. Diğer yandan  $k$  üzerinden tümevarımla ve  $q$ -tomurcuk fonksiyonunun çok lineerlik özelliği kullanılarak algoritmadaki  $\tilde{P}_i^k(t)$  düğümleri

$$\tilde{P}_i^k(t) = p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{i-1}, tq^{n-k}, \dots, tq^{n-1}; q), \quad i = 0, \dots, n-k; \quad k = 0, \dots, n$$

dir. Özel durumda

$$\tilde{P}_0^n(t) = p(t, tq, \dots, tq^{n-1}; q) = P(t)$$

bulunur. Bunu  $k$  üzerinden tümevarım yardımıyla gösterelim.

$k = 0$  için  $\tilde{P}_i^0(t) = p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{i-1}; q)$  olduğu açıktır.

$\tilde{P}_i^k(t) = p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{i-1}, tq^{n-k}, \dots, tq^{n-1}; q)$  olsun. Şimdi

$$\tilde{P}_i^{k+1}(t) = p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{i-1}, tq^{n-k-1}, \dots, tq^{n-1}; q)$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

$q$ -Casteljaou algoritmasından

$$\tilde{P}_i^{k+1}(t) = (1 - tq^{n-k-1-i}) \tilde{P}_i^k(t) + tq^{n-k-1-i} \tilde{P}_{i+1}^k(t)$$

yazılır. Hipotezden  $\tilde{P}_i^k(t)$  ve  $\tilde{P}_{i+1}^k(t)$  fonksiyonlarının  $q$ -tomurcuk fonksiyonu değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{P}_i^{k+1}(t) &= (1 - tq^{n-k-1-i}) p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{i-1}, tq^{n-k}, \dots, tq^{n-1}; q) \\ &\quad + tq^{n-k-1-i} p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^i, tq^{n-k}, \dots, tq^{n-1}; q) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte  $q$ -tomurcuk fonksiyonunun simetri ve çok lineerlik özellikleri kullanılırsa

$$\tilde{P}_i^{k+1}(t) = p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{i-1}, tq^{n-k-1}, \dots, tq^{n-1}; q)$$

elde edilir.

$$\tilde{P}_0^n(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t; q)$$

ve

$$\tilde{P}_0^n(t) = p(t, tq, \dots, tq^{n-1}; q) = P(t)$$

eşitliklerinden ispat tamamlanır.

**Teorem 4.2.2**  $[a, b]$  üzerindeki  $P(t)$  polinomu  $q$ -tomurcuk fonksiyonu  $p(u_1, \dots, u_n; q)$  olan  $n$ -inci dereceden bir polinom olsun. Bu durumda

$$P(t) = \sum_{i=0}^n p(aq^i, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{i-1}; q) B_i^n(t; [a, b]; q)$$

dir.

**İspat.** İspatı  $n$  üzerinden tümevarım ile gösterelim.

$$B_i^n(t; [a, b]; q) = \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (t - aq^j) \prod_{j=0}^{n-i-1} (b - tq^j)}{\prod_{j=0}^{n-1} (b - aq^j)}, \quad i = 0, \dots, n; \quad j = 1, \dots, n-1$$

ifadesinde  $i \leq n$  olduğundan  $n = 0$  için yalnızca  $i = 0$  durumu söz konusudur.

$$B_0^0(t; [a, b]; q) = 1$$

olup  $P(t) = 1$  dir.

$P(t) = \sum_{i=0}^n p(aq^i, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{i-1}; q) B_i^n(t; [a, b]; q)$  eşitliği  $n \geq 1$  olmak üzere derecesi en çok  $n-1$  olan polinomlar için doğru olsun.  $P(t)$  polinomu  $n$ -inci dereceden bir polinom olmak üzere  $q$ -Casteljau algoritması ile

$$P_i^{k+1}(t) = (1 - \alpha_{k,i}) P_i^k(t) + \alpha_{k,i} P_{i+1}^k(t); \quad \alpha_{k,i} = \frac{tq^{\sigma(k+1)-i-1} - aq^k}{b - aq^k}$$

$$P_i^k(t) = p(aq^{k+i}, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{i-1}, tq^{\sigma(1)-1}, \dots, tq^{\sigma(k)-1}; q)$$

ifadesinde  $\sigma(k) = k$  alınırsa

$$\alpha_{k,i} = \frac{tq^{k-i} - aq^k}{b - aq^k}$$

olup

$$P_i^k(t) = p(aq^{k+i}, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{i-1}, t, tq, \dots, tq^{k-1}; q)$$

bulunur.  $i = 0$  ve  $k = n-1$  durumunda

$$P_0^n(t) = P(t) = (1 - \alpha_{n-1,0}) P_0^{n-1}(t) + \alpha_{n-1,0} P_1^{n-1}(t)$$

olup

$$P_0^{n-1}(t) = p(aq^{n-1}, t, tq, \dots, tq^{n-2}; q)$$

$$P_1^{n-1}(t) = p(b, t, tq, \dots, tq^{n-2}; q)$$

dir. Ayrıca  $P_0^{n-1}(t)$  ve  $P_1^{n-1}(t)$  fonksiyonlarının  $q$ -tomurcuk fonksiyonları sırasıyla

$$p_0(u_1, \dots, u_{n-1}; q) = p(aq^{n-1}, u_1, \dots, u_{n-1}; q)$$

$$p_1(u_1, \dots, u_{n-1}; q) = p(b, u_1, \dots, u_{n-1}; q)$$

,  $u_k = tq^{k-1}$  dir. Dikkat edilmelidir ki bu fonksiyonlar  $q$ -tomurcuk fonksiyonu aksiyonlarını sağlar.



Kabulden

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n-1} p(aq^i, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{i-1}; q) B_i^{n-1}(t; [a, b]; q)$$

olduğunu biliyoruz.  $[a, b]$  üzerindeki  $P_0^{n-1}(t)$  ve  $[aq, bq]$  üzerindeki  $P_1^{n-1}(t)$  polinomları için

$$\begin{aligned} P_0^{n-1}(t) &= \sum_{j=0}^{n-1} p(aq^j, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{j-1}; q) B_j^{n-1}(t; [a, b]; q) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} p(aq^{n-1}, aq^j, \dots, aq^{n-2}, b, bq, \dots, bq^{j-1}; q) B_j^{n-1}(t; [a, b]; q) \\ &= \sum_{j=0}^n P_j^0 B_j^{n-1}(t; [a, b]; q) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} P_1^{n-1}(t) &= \sum_{j=0}^{n-1} p(aq^{j+1}, \dots, aq^n, bq, bq^2, \dots, bq^j; q) B_j^{n-1}(t; [aq, bq]; q) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} p(aq^n, aq^{j+1}, \dots, aq^{n-1}, bq, \dots, bq^j; q) B_j^{n-1}(t; [aq, bq]; q) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} P_{j+1}^0 B_j^{n-1}(t; [aq, bq]; q) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} P_{j+1}^0 B_j^{n-1}\left(\frac{t}{q}; [a, b]; q\right) \end{aligned}$$

yazılır. Ayrıca

$$(1 - \alpha_{n-1,0}(t)) B_0^{n-1}(t; [a, b]; q) = B_0^n(t; [a, b]; q)$$

olup

$$(1 - \alpha_{n-1,0}(t)) B_j^{n-1}(t; [a, b]; q) + \alpha_{n-1,0}(t) B_{j-1}^{n-1}\left(\frac{t}{q}; [a, b]; q\right) = B_j^n(t; [a, b]; q)$$

eşitliği gerçekleşir.

**Sonuç 4.2.1**  $[0, 1]$  aralığı üzerindeki  $n$  -inci dereceden  $q$ -Bernstein taban fonksiyonları  $q = -1$  ve  $n$  çift durumu haricinde  $n$  -inci dereceden polinomlar için baz oluşturur.

**İspat.** Bu sonuç  $q$  üzerindeki standart kısıtlamalar altında önceki teoremden direkt olarak görülür. Ayrıca

$$B_i^n(t; q) = \binom{n}{i}_q t^i \prod_{s=0}^{n-i-1} (1 - q^s t)$$

$q$ -Bernstein taban fonksiyonu ifadesinde  $q = 0$  alınırsa

$$B_i^n(t; 0) = t^i (1 - t) = t^i - t^{i+1}, \quad i = 0, \dots, n - 1$$

ve  $i = n$  alınırsa

$$B_n^n(t; 0) = t^n$$

polinomları bulunur.

**Sonuç 4.2.2** Keyfi bir  $[a, b]$  aralığı üzerindeki  $n$  -inci dereceden  $q$ -Bernstein taban fonksiyonları  $q = -1$  ve  $n$  çift durumu haricinde  $n$  -inci dereceden polinomlar için baz oluşturur.

**İspat.** Bu sonuç  $q$  nun standart kısıtlamaları altında direkt olarak görülür. Ayrıca  $B_i^n(t; [a, b]; q)$  ifadesinde  $q = 0$  alınırsa

$$\begin{aligned} B_i^n(t; [a, b]; 0) &= \frac{(t - a) t^{i-1} (b - t) b^{-i}}{b - a} \\ &= \frac{-b^{-i}}{b - a} t^{i+1} + \frac{(ab^{-i} + b^{1-i})}{b - a} t^i - \frac{ab^{1-i}}{b - a} t^{i-1} \end{aligned}$$

bulunup istenilen elde edilir.

**Sonuç 4.2.3**  $[0, 1]$  aralığındaki  $q$ -Bézier eğrisinin kontrol noktaları tektir.

**İspat.**  $P(t)$ ,  $[0, 1]$  üzerinde tanımlı, kontrol noktaları  $P_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  ve  $q$ -tomurcuk fonksiyonu  $p(u_1, \dots, u_n; q)$  olan  $n$ -inci dereceden bir  $q$ -Bézier eğrisi olsun.

Kabul edelim ki  $\exists i = i_0$  için  $P_{i_0}$  kontrol noktası tek olmasın. Bu durumda

$i_1 \neq i_2$  olmak üzere  $P_{i_0} = P_{i_1}$  ve  $P_{i_0} = P_{i_2}$  olacak şekilde  $P_{i_1}$  ve  $P_{i_2}$  noktaları vardır.

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t; q) \\ &= \sum_{i=0}^n p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{i-1}; q) B_i^n(t; q) \end{aligned}$$

olup

$$P(t) = \sum_{i=0}^{i_0-1} P_i B_i^n(t; q) + P_{i_0} B_{i_0}^n(t; q) + \sum_{i=i_0+1}^n P_i B_i^n(t; q)$$

yazılır.

$$\sum_{i=0}^{i_0-1} P_i B_i^n(t; q) = A \text{ ve } \sum_{i=i_0+1}^n P_i B_i^n(t; q) = B \text{ olmak üzere}$$

$$P_{i_0} = P_{i_1} \Rightarrow P(t) = A + B + B_{i_0}^n(t; q) p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{i_1-1}; q)$$

$$P_{i_0} = P_{i_2} \Rightarrow P(t) = A + B + B_{i_0}^n(t; q) p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{i_2-1}; q)$$

eşitliğinden

$$B_{i_0}^n(t; q) \{p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{i_1-1}; q) - p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{i_2-1}; q)\} = 0$$

bulunur.  $B_{i_0}^n(t; q) \neq 0$  olduğundan

$$p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{i_1-1}; q) = p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{i_2-1}; q)$$

olup  $P_{i_1} = P_{i_2}$  elde edilir.

**Sonuç 4.2.4**  $[a, b]$  aralığındaki  $q$ -Bézier eğrisinin kontrol noktaları tektir.

**Teorem 4.2.3**  $P(t)$ ,  $[0, 1]$  üzerinde  $n$ -inci dereceden bir  $q$ -Bézier eğrisi ve  $p(u_1, \dots, u_n; q)$  da  $P(t)$  nin  $q$ -tomurcuk fonksiyonu olsun. Bu durumda  $P(t)$  eğrisinin kontrol noktaları

$$P_k = p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{k-1}; q), \quad k = 0, \dots, n$$

dir.

**İspat.** Teorem 4.2.1'den

$$P(t) = \sum_{k=0}^n p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{k-1}; q) B_k^n(t; q)$$

yazılır. Bu eşitlikten ve  $q$ -Bézier eğrisinin kontrol noktalarının tekliğinden

$$P_k = p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{k-1}; q), \quad k = 0, \dots, n$$

olduğu görülür.

**Teorem 4.2.4**  $P(t)$ ,  $[a, b]$  üzerinde  $n$ -inci dereceden bir  $q$ -Bézier eğrisi ve  $p(u_1, \dots, u_n; q)$  da  $P(t)$  nin  $q$ -tomurcuk fonksiyonu olsun. Bu durumda  $P(t)$  eğrisinin kontrol noktaları

$$P_k = p(aq^k, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{k-1}; q), \quad k = 0, \dots, n$$

dir.

**İspat.** Teorem 4.2.2'den

$$P(t) = \sum_{k=0}^n p(aq^k, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{k-1}; q) B_k^n(t; q)$$

yazılır. Bu eşitlikten ve  $q$ -Bézier eğrisinin kontrol noktalarının tekliğinden

$$P_k = p(aq^k, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{k-1}; q), \quad k = 0, \dots, n$$

olduğu görülür.

**Teorem 4.2.5**  $P(t)$ , kontrol noktaları  $P_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  olan  $[a, b]$  üzerinde  $n$ -inci dereceden bir  $q$ -Bézier eğrisi olsun.  $P_i^k$ ,  $k = 0, \dots, n$ ;  $i = 0, \dots, n - k$   $q$ -Casteljaou algoritmasındaki düğümler olsun. Bu durumda

$$P_i^k(t) = \sum_{j=0}^k P_{i+j} B_j^k \left( \frac{t}{q^i}; [a, b]; q \right)$$

dir.

**İspat.**  $k$ -ıncı dereceden  $P_i^k(t)$  polinomunun  $q$ -tomurcuk fonksiyonu  $Q_i^k(u_1, \dots, u_k; q)$  olsun.  $P_i^k(t)$  polinomları  $[c, d]$  aralığında tanımlı olmak üzere Teorem 4.2.2'den

$$P_i^k(t) = \sum_{j=0}^k Q_i^k(cq^j, \dots, cq^{k-1}, d, dq, \dots, dq^{j-1}; q) B_j^k(t; [c, d]; q)$$

yazılır.

$$Q_i^k(u_1, \dots, u_k) = p(aq^{k+i}, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{i-1}, u_1, \dots, u_k; q)$$

olduğunu biliyoruz. O halde

$$P_i^k(t) = \sum_{j=0}^k p(aq^{k+i}, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{i-1}, cq^j, \dots, cq^{k-1}, d, dq, \dots, dq^{j-1}; q) B_j^k(t; [c, d]; q)$$

dir.

$[c, d] = [aq^i, bq^i]$  seçimi yapılırsa

$$P_i^k(t) = \sum_{j=0}^k p(aq^{k+i}, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{i-1}, aq^{i+j}, \dots, aq^{i+k-1}, bq^i, bq^{i+1}, \dots, bq^{i+j-1}; q) \times B_j^k(t; [aq^i, bq^i]; q)$$

$P_{i+j} = p(aq^{i+j}, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{i+j-1}; q)$  olup,

$$P_i^k(t) = \sum_{j=0}^k p(aq^{i+j}, \dots, aq^{i+k-1}, aq^{k+i}, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{i-1}, bq^i, bq^{i+1}, \dots, bq^{i+j-1}; q) \\ \times B_j^k\left(\frac{t}{q^i}; [a, b]; q\right)$$

ve

$$P_i^k(t) = \sum_{j=0}^k P_{i+j} B_j^k\left(\frac{t}{q^i}; [a, b]; q\right)$$

bulunur.

**Teorem 4.2.6**  $P(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t; q)$  bir  $q$ -Bézier eğrisi ve  $p(u_1, \dots, u_n; q)$  da bu polinomun  $q$ -tomurcuk fonksiyonu olsun.

$$Q_i^0 = P_i$$

$$Q_i^{k+1}(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}) = (1 - u_{k+1}q^{-i}) Q_i^k(u_1, \dots, u_k) + u_{k+1}q^{-i} Q_{i+1}^k(u_1, \dots, u_k); \\ i = 0, \dots, n - k - 1; k = 0, \dots, n - 1$$

ve bu durumda

$$Q_i^k(u_1, \dots, u_k) = p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{i-1}, u_1, \dots, u_k; q)$$

$i = 0, \dots, n - k; k = 0, \dots, n$  olup  $i = 0$  ve  $k = n$  olma durumunda

$$Q_0^n(u_1, \dots, u_n) = p(u_1, \dots, u_n; q)$$

dir.

**İspat.** Teorem 4.2.1'den

$$Q_i^0 = p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{i-1}; q), \quad i = 0, \dots, n$$

olup teoremin ispatını  $k$  üzerinden tümevarım yardımıyla gösterelim.

$$Q_i^k(u_1, \dots, u_k) = p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{i-1}, u_1, \dots, u_k; q)$$

olsun.

$$Q_i^{k+1}(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}) = p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{i-1}, u_1, \dots, u_k, u_{k+1}; q)$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

$$Q_i^{k+1}(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}) = (1 - u_{k+1}q^{-i}) Q_i^k(u_1, \dots, u_k; q) + u_{k+1}q^{-i} Q_{i+1}^k(u_1, \dots, u_k; q)$$

ifadesinde

$$\begin{aligned} Q_i^{k+1}(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}) &= (1 - u_{k+1}q^{-i}) p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{i-1}; q) \\ &\quad + u_{k+1}q^{-i} p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{i-1}, q^i, u_1, \dots, u_k; q) \\ &= p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{i-1}, u_1, \dots, u_k, u_{k+1}; q) \end{aligned}$$

olduğunu gösterelim.

$$(1 - u_{k+1}q^{-i}) p(0, \dots, q^{i-1}, 1, q, \dots, q^{i-2}, 0, u_1, \dots, u_k; q)$$

$$+ u_{k+1}q^{-i} p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{i-1}, q^i, u_1, \dots, u_k; q) = p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{i-1}, u_1, \dots, u_k, u_{k+1}; q)$$

dir. Gerçekten  $q$ -tomurcuk fonksiyonunun çok lineerlik özelliğinden

$$(1 - u_{k+1}q^{-i}) 0 + u_{k+1}q^{-i} q^i = u_{k+1}$$

olup istenilen elde edilir.

**Sonuç 4.2.5**  $P(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t; q)$ ,  $q$ -tomurcuk fonksiyonu  $p(u_1, \dots, u_n; q)$  olan

$n$  -inci dereceden bir  $q$ -Bézier eğrisi olsun.

$\sigma$  ifadesi;  $\{1, \dots, n\}$  kümesinin her türlü permütasyonu ve  $P_i^0(t) = P_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  olsun.

$$P_i^{k+1}(t) = (1 - tq^{\sigma(k+1)-1-i}) P_i^k(t) + tq^{\sigma(k+1)-1-i} P_{i+1}^k(t)$$

$i = 0, \dots, n - k - 1$ ;  $k = 0, \dots, n - 1$  tanımlayalım. Bu durumda

$$P_i^k(t) = p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{i-1}, tq^{\sigma(1)-1}, \dots, tq^{\sigma(k)-1}; q)$$

dir. Özel durumda

$$P_0^n(t) = p(tq^{\sigma(1)-1}, \dots, tq^{\sigma(n)-1}; q)$$

eşitliği sağlanır.

**İspat.** Teorem 4.2.6' da  $u_k = tq^{\sigma(k)-1}$ ,  $k = 1, \dots, n$  yazılarak istenilen elde edilir.

**Teorem 4.2.7**  $P(t)$ ,  $q$ -tomurcuk fonksiyonu  $p(u_1, \dots, u_n; q)$  olan  $n$  -inci dereceden bir polinom olsun.

$i = 0, \dots, n - k - 1$ ,  $k = 0, \dots, n - 1$  ve  $\beta_{k,i} = \frac{u_{k+1}q^{-i} - aq^k}{b - aq^k}$  için

$$Q_i^0 = p(aq^i, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{i-1}; q), \quad i = 0, \dots, n$$

ve ardışık biçimde

$$Q_i^{k+1}(u_1, \dots, u_{k+1}) = (1 - \beta_{k,i}) Q_i^k(u_1, \dots, u_k) + \beta_{k,i} Q_{i+1}^k(u_1, \dots, u_k)$$

çok lineer fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu durumda

$$Q_i^k(u_1, \dots, u_k) = p(aq^{k+i}, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{i-1}, u_1, \dots, u_k; q)$$



$i = 0, \dots, n - k; k = 0, \dots, n$  dir. Özel durumda

$$Q_0^n(u_1, \dots, u_n) = p(u_1, \dots, u_n; q)$$

olur.

**İspat.** İspatı  $k$  üzerinden tümevarım yardımıyla gösterelim.

$Q_i^0 = p(aq^i, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{i-1}; q) = P_i$  olduğundan  $k = 0$  için ifade doğrudur.  $k$  için doğru olsun. Yani

$$Q_i^k(u_1, \dots, u_k) = p(aq^{k+i}, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^i, u_1, \dots, u_k; q)$$

eşitliği sağlansın.  $k + 1$  için

$$Q_i^{k+1}(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}) = p(aq^{k+1+i}, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^i, u_1, \dots, u_k, u_{k+1}; q)$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

$$Q_i^{k+1}(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}) = (1 - \beta_{k,i}) Q_i^k(u_1, \dots, u_k) + \beta_{k,i} Q_{i+1}^k(u_1, \dots, u_k),$$

$$\beta_{k,i} = \frac{u_{k+1}q^{-i} - aq^k}{b - aq^k} \text{ ifadesinde}$$

$$\begin{aligned} Q_i^{k+1}(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}) &= (1 - \beta_{k,i}) p(aq^{k+i}, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^i, u_1, \dots, u_k; q) \\ &\quad + \beta_{k,i} p(aq^{k+i+1}, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{i+1}, u_1, \dots, u_k; q) \\ &= p(aq^{k+1+i}, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^i, u_1, \dots, u_k, u_{k+1}; q) \end{aligned}$$

olduğunu gösterelim.

$$\left(1 - \frac{u_{k+1}q^{-i} - aq^k}{b - aq^k}\right) p(aq^{k+1}, aq^{k+i+1}, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^i, u_1, \dots, u_k; q)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{u_{k+1}q^{-i} - aq^k}{b - aq^k} p(aq^{k+i+1}, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{i+1}, u_1, \dots, u_k; q) \\
& = p(aq^{k+1+i}, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^i, u_1, \dots, u_k, u_{k+1}; q)
\end{aligned}$$

eşitliğinin sağlanması için tomurcuk fonksiyonunun hangi terimi üzerinden işlem yapacağımızı belirleyelim. Bunun için

$$\left(1 - \frac{u_{k+1}q^{-i} - aq^k}{b - aq^k}\right) A + \frac{u_{k+1}q^{-i} - aq^k}{b - aq^k} B = u_{k+1}$$

eşitliğinde  $A$  ve  $B$  yi belirlemek gerekir.

$$\begin{cases} b - aq^k = Bq^{-i} - Aq^{-i} \\ bA - aBq^k = 0 \end{cases} \quad \text{denklem sisteminden } A = aq^{k+i} \text{ ve } B = bq^i \text{ olduğu ko-}$$

laylıkla gösterilebilir.

Böylece tomurcuk fonksiyonunun simetri ve çok lineerlik özelliklerinden istenilen elde edilir.

Şimdi  $P(t)$  için  $n!$  tane afin invaryant, ardışık algoritma var olduğunu gösterelim.

**Sonuç 4.2.6**  $P(t)$ ,  $q$ -tomurcuk fonksiyonu  $p(u_1, \dots, u_n; q)$  olan  $n$ -inci dereceden bir polinom olsun.

$\sigma$  ifadesi;  $\{1, 2, \dots, n\}$  kümesinin her türlü permütasyonu ve

$$P_i^0(t) = p(aq^i, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{i-1}; q), \quad i = 0, \dots, n$$

olsun. Ardışık olarak

$$P_i^{k+1}(t) = (1 - \alpha_{k,i}) P_i^k(t) + \alpha_{k,i} P_{i+1}^k(t)$$

$i = 0, \dots, n - k - 1; k = 0, \dots, n - 1$

$$\alpha_{k,i} = \alpha_{k,i}(t) = \alpha_{k,i}(t; \sigma; q) = \frac{tq^{\sigma(k+1)-1-i} - aq^k}{b - aq^k}$$

tanımlayalım. Bu durumda

$$P_i^k(t) = p(aq^{k+i}, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{i-1}, tq^{\sigma(1)-1}, \dots, tq^{\sigma(k)-1}; q)$$

$i = 0, \dots, n - k; k = 0, \dots, n$  dir. Özel durumda

$$P_0^n(t) = p(tq^{\sigma(1)-1}, \dots, tq^{\sigma(n)-1}; q) = P(t)$$

dir.

**İspat.** Teorem 4.2.7' de  $q$ -tomurcuk fonksiyonu değerlerindeki  $u_i$  ler yerine  $tq^{\sigma(i)-1}$  yazılarak istenilen elde edilir.

**Lemma 4.2.1**  $B_i^n(t; q)$   $q$ -Bernstein taban fonksiyonunun  $q$ -tomurcuk fonksiyonu  $b_i^n(u_1, \dots, u_n; q)$ ,  $i = 0, \dots, n$  olmak üzere

$$b_i^n(u_1, \dots, u_{n-1}, 0; q) = b_i^{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}; q), \quad i = 0, \dots, n - 1$$

dır.

**İspat.**  $P(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t; q)$  bir  $q$ -Bézier eğrisi ve  $p(u_1, \dots, u_n; q)$  da bu polinomun  $q$ -tomurcuk fonksiyonu olsun.

$$Q_i^0 = P_i$$

$$Q_i^{k+1}(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}) = (1 - u_{k+1}q^{-i}) Q_i^k(u_1, \dots, u_k) + u_{k+1}q^{-i} Q_{i+1}^k(u_1, \dots, u_k),$$

$i = 0, \dots, n - k - 1; k = 0, \dots, n - 1$

ve

$$Q_i^k(u_1, \dots, u_k) = p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{i-1}, u_1, \dots, u_k; q)$$

$i = 0, \dots, n - k; k = 0, \dots, n$  olup  $i = 0$  ve  $k = n$  durumunda

$$Q_0^n(u_1, \dots, u_n) = p(u_1, \dots, u_n; q) = P(t)$$

dir. Teorem 4.2.1'e bağılı olarak  $B_i^n(t; q)$  ve  $B_i^{n-1}(t; q)$  polinomları için ilk  $n - 1$  başlangıç  $q$ -tomurcuk fonksiyonu değeri aynıdır.

$$Q_j^0 = 0, \quad j = 0, \dots, n - 1, \quad j \neq i \text{ ve } Q_i^0 = 1$$

$$Q_j^{k+1}(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}) = (1 - u_{k+1}q^{-j})Q_j^k(u_1, \dots, u_k) + u_{k+1}q^{-j}Q_{j+1}^k(u_1, \dots, u_k),$$

$i = 0, \dots, n - k - 1; k = 0, \dots, n - 1$

$$Q_j^k(u_1, \dots, u_k) = b_i^n(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{j-1}, u_1, \dots, u_k; q)$$

$j = 0, \dots, n - k; k = 0, \dots, n$  olup  $B_i^n(t; q)$  ve  $B_i^{n-1}(t; q)$  nun  $q$ -tomurcuk fonksiyonları ardışık algoritma tarafından oluşturulan  $Q_j^k, j = 0, \dots, n - k - 1; k = 0, \dots, n$  fonksiyonları ile çakışır. Ayrıca  $j = 0$  ve  $k = n$  için de

$$Q_0^n(u_1, \dots, u_n) = b_i^n(u_1, \dots, u_n; q)$$

olur ve

$$Q_0^{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}) = b_i^{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}; q)$$

yazılır. Bu nedenle  $Q_0^{n-1}, B_i^{n-1}(t; q)$  nun  $q$ -tomurcuk fonksiyonu ile aynıdır. Diğer yandan  $B_i^n(t; q)$  için de  $Q_0^n(u_1, \dots, u_n)$  de  $u_n = 0$  yazıldığında açık olarak  $Q_0^{n-1}$  elde edilir.

$$Q_0^n(u_1, \dots, u_{n-1}, u_n) = (1 - u_n q^0) Q_0^{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}) + u_n q^0 Q_1^{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1})$$

$$Q_0^n(u_1, \dots, u_{n-1}, u_n) = (1 - u_n) Q_0^{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}) + u_n Q_1^{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1})$$

ifadesinde  $u_n = 0$  yazılırsa

$$Q_0^n(u_1, \dots, u_{n-1}, u_n) = Q_0^{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1})$$

elde edilir. Yani

$$b_i^n(u_1, \dots, u_{n-1}, 0; q) = b_i^{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}; q)$$

dir.

Şimdi  $[a, b]$  aralığındaki keyfi bir  $q$ -Bézier eğrisini iki ayrı Bézier eğrisine bölmek için, sol ve sağ parçalama ifadelerini verelim.

**Teorem 4.2.8 (Sol  $q$ -parçalama)**  $q$  üzerindeki standart kısıtlar altında  $x \in (a, b)$  ve  $P(t)$ ,  $[a, b]$  aralığı üzerinde  $n$ -inci dereceden bir  $q$ -Bézier eğrisi olsun.  $[a, x]$  alt aralığı üzerindeki  $P(t)$  eğrisi için kontrol çokgeni  $\sigma(k) = k$ ,  $k = 1, \dots, n$  seçilerek oluşturulur. Yani

$$P_i^{k+1}(t) = \frac{b - tq^{k-i}}{b - aq^k} P_i^k(t) + \frac{tq^{k-i} - aq^k}{b - aq^k} P_{i+1}^k(t)$$

$L_k = P_0^k(x)$ ,  $k = 0, \dots, n$   $q$ -Bézier kontrol noktalarını hesaplamak için kullanılan algoritmadaki diyagramın sol kenarından elde edilir. Özel olarak

$$P(t) = \sum_{k=0}^n L_k B_k^n(t; [a, b]; q), \quad t \in [a, x]$$

dir. Burada  $p(u_1, \dots, u_n; q)$ ,  $P(t)$  nin  $q$ -tomurcuk fonksiyonu olmak üzere

$$L_k = p(aq^k, \dots, aq^{n-1}, x, xq, \dots, xq^{k-1}; q), \quad k = 0, \dots, n$$

ve

$$L_k = \sum_{j=0}^k P_j B_j^k(x; [a, b]; q), \quad k = 0, \dots, n$$

dir.

**İspat.** Teorem 4.2.2' den  $[a, b]$  aralığındaki  $n$  -inci dereceden  $q$ -Bézier eğrisinin kontrol noktaları

$$P_k = p(aq^k, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{k-1}; q), \quad k = 0, \dots, n$$

idi. Bunu  $[a, x]$  aralığına uygularsak

$$P_k = p(aq^k, \dots, aq^{n-1}, x, xq, \dots, xq^{k-1}; q), \quad k = 0, \dots, n$$

bulunur. Ayrıca  $[a, b]$  için

$$P_i^k(t) = p(aq^k, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{i-1}, t, tq, \dots, tq^{k-1}; q)$$

olup

$$L_k = P_0^k(x) = p(aq^k, \dots, aq^{n-1}, x, xq, \dots, xq^{k-1}; q)$$

dir.  $P(t)$ , kontrol noktaları  $P_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  olan  $[a, b]$  üzerinde  $n$  -inci dereceden bir  $q$ -Bézier eğrisi olmak üzere  $\sigma(k) = k$  için

$$P_i^k(t) = \sum_{j=0}^k P_{i+j} B_j^k\left(\frac{t}{q^i}; [a, b]; q\right)$$

olduğundan

$$L_k = P_0^k(x) = \sum_{j=0}^k P_j B_j^k(x; [a, b]; q)$$

bulunur.

**Teorem 4.2.9 (Sağ  $q$ -parçalama)**  $q$  üzerindeki standart kısıtlar altında  $x \in (a, b)$  ve  $P(t)$ ,  $[a, b]$  aralığı üzerinde  $n$  -inci dereceden bir  $q$ -Bézier eğrisi olsun.  $[x, b]$  alt aralığı üzerindeki  $P(t)$  eğrisi için kontrol çokgeni  $\sigma(k) = n + 1 - k$ ;  $k = 1, \dots, n$

seçilerek oluşturulur. Yani

$$\begin{aligned} P_i^k(t) &= p(aq^{k+i}, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{i-1}, tq^{n-1}, \dots, tq^{n-k}; q) \\ P_i^{k+1}(t) &= \frac{b - tq^{n-k-i-1}}{b - aq^k} P_i^{k+1}(t) + \frac{tq^{n-k-i-1} - aq^k}{b - aq^k} P_{i+1}^k(t) \end{aligned}$$

$R_k = P_k^{n-k}(x)$ ,  $k = 0, \dots, n$  sağ kontrol noktaları algoritmaya karşılık gelen diyagramın sağ kenarından elde edilir. Özel durumda

$$P(t) = \sum_{k=0}^n R_k B_k^n(t; [x, b]; q), \quad t \in [x, b]$$

ve

$$R_k = p(b, bq, \dots, bq^{k-1}, xq^k, \dots, xq^{n-1}; q), \quad k = 0, \dots, n$$

dir. Ayrıca

$$R_k = \sum_{j=k}^n P_j B_{j-k}^{n-k}(x; [a, b]; q), \quad k = 0, \dots, n$$

dir.

**İspat.**  $[a, b]$  aralığı için

$$P_i^k(t) = p(aq^{k+i}, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{i-1}, tq^{n-1}, \dots, tq^{n-k}; q)$$

olduğundan

$$P_k^{n-k}(t) = p(b, bq, \dots, bq^{k-1}, tq^{n-1}, \dots, tq^k; q)$$

olup  $[x, b]$  de

$$R_k = P_k^{n-k}(x) = p(b, bq, \dots, bq^{k-1}, xq^{n-1}, \dots, xq^k; q)$$

dir.

$$P(t) = \sum_{k=0}^n R_k B_k^n(t; [x, b]; q), \quad t \in [x, b]$$

olduğunu gösterelim.

$P(t) = \sum_{i=0}^n p(aq^i, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{i-1}; q) B_i^n(t; [a, b]; q)$  olduğunu biliyoruz. Bu eşitlik  $[x, b]$  aralığı için uygulandığında

$$P(t) = \sum_{k=0}^n p(xq^k, \dots, xq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{k-1}; q) B_i^n(t; [a, b]; q) \text{ yazılır.}$$

$$R_k = \sum_{j=k}^n P_j B_{j-k}^{n-k}(x; [a, b]; q), \quad k = 0, \dots, n \text{ olduğunu göstermek için}$$

$$P_i^k(t) = p(aq^{k+i}, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{i-1}, tq^{\sigma(1)-1}, \dots, tq^{\sigma(k)-1}; q)$$

ifadesinde  $\sigma(l) = l, \quad l = 1, \dots, n$  için  $P_i^k = \hat{P}_i^k$  ve  $\sigma(l) = n+1-l, \quad l = 1, \dots, n$  için  $P_i^k = \check{P}_i^k$  olsun. Teorem 4.2.5'den

$$P_i^k(t) = \sum_{j=0}^k P_{i+j} B_j^k\left(\frac{t}{q^i}, [a, b]; q\right)$$

olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned} \hat{P}_i^k(t) &= p(aq^{k+i}, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{i-1}, t, tq, \dots, tq^{k-1}; q) \\ \hat{P}_k^{n-k}(t) &= p(b, bq, \dots, bq^{k-1}, t, tq, \dots, tq^{n-k-1}; q) \\ &= \sum_{j=0}^{n-k} P_{k+j} B_j^{n-k}\left(\frac{t}{q^k}, [a, b]; q\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \check{P}_i^k(t) &= p(aq^{k+i}, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{i-1}, tq^{n-1}, \dots, tq^{n-k}; q) \\ \check{P}_k^{n-k}(t) &= p(b, bq, \dots, bq^{k-1}, xq^k, \dots, xq^{n-1}; q) \\ &= R_k \end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$\check{P}_k^{n-k}(xq^k) = p(b, bq, \dots, bq^{k-1}, xq^k, \dots, xq^{n-1}; q)$$



$$R_k = \check{P}_k^{n-k} (xq^k) = \sum_{j=0}^{n-k} P_{k+j} B_j^{n-k} (x; [a, b]; q), \quad k = 0, \dots, n$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

### 4.3 $q$ -Tomurcuk Fonksiyonu Yardımıyla Elde Edilen Bazı Eşitlikler

Bu bölümde  $q$ -Bernstein taban fonksiyonları için bilinen bazı eşitlikleri  $q$ -tomurcuk fonksiyonu yardımıyla ispatlayacağız.

#### Önerme 4.3.1 (*Marsden Özdeşliği*)

$[0, 1]$  aralığındaki  $q$ -Bernstein taban fonksiyonları için

$$\prod_{i=1}^n (x - tq^{i-1}) = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j q^{\frac{j(j-1)}{2}} B_{n-j}^n \left(x; \frac{1}{q}\right) B_j^n(t; q)}{\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_{\frac{1}{q}}}$$

eşitliği sağlanır (Simeonov vd. 2010).

**İspat.** Eşitliğin sol tarafı  $P(t)$  polinomunu gösterebiliriz.  $P(t)$  polinomunun  $q$ -tomurcuk fonksiyonu

$$p(u_1, \dots, u_n; q) = \prod_{l=1}^n (x - u_l)$$

dir. Gerçekten  $q$ -tomurcuk fonksiyonunun  $q$ -diagonal özelliğinden

$$p(t, tq, \dots, tq^{n-1}; q) = P(t)$$

elde edilir. Ayrıca bu fonksiyon simetrik ve çok lineerdir. Teorem 4.2.1'den

$$\begin{aligned}
P(t) &= \prod_{i=1}^n (x - tq^{i-1}) \\
&= \sum_{j=0}^n P_j B_j^n(t; q) \\
&= \sum_{j=0}^n p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{j-1}; q) B_j^n(t; q)
\end{aligned}$$

yazılır.  $p(u_1, \dots, u_n; q) = (x - u_1) \dots (x - u_n)$  olduğundan

$$p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{j-1}; q) = x^{n-j} \prod_{l=0}^{j-1} (x - q^l)$$

dir. Buradan

$$P(t) = \sum_{j=0}^n x^{n-j} \prod_{l=0}^{j-1} (x - q^l) B_j^n(t; q)$$

ifadesi  $q$  nun kuvvetlerine göre çarpanlarına ayrıldığında eşitliğin sağ tarafı bulunur.

Burada

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^n x^{n-j} \prod_{l=0}^{j-1} (x - q^l) B_j^n(t; q) &= \sum_{j=0}^n x^{n-j} \{(x-1)(x-q) \dots (x-q^{j-1})\} B_j^n(t; q) \\
&= \sum_{j=0}^n (-1)^{j+1} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{(q-x)(q^2-x) \dots (q^{j-1}-x)}{q^{\frac{j(j-1)}{2}}} B_j^n(t; q) \\
&= \sum_{j=0}^n (-1)^{j+1} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \left[ (1-x) \left(1 - \frac{1}{q}x\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q^{j-1}}x\right) \right] \\
&\quad \times B_j^n(t; q) \\
&= \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j q^{\frac{j(j-1)}{2}} \left( \left[ \begin{matrix} n \\ n-j \end{matrix} \right]_{\frac{1}{q}} x^{n-j} \prod_{s=0}^{j-1} \left(1 - \frac{1}{q^s}x\right) \right)}{\left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_{\frac{1}{q}}} B_j^n(t; q) \\
&= \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j q^{\frac{j(j-1)}{2}} B_{n-j}^n\left(x; \frac{1}{q}\right) B_j^n(t; q)}{\left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_{\frac{1}{q}}}
\end{aligned}$$

olduğundan istenilen elde edilir.

**Önerme 4.3.2**  $[a, b]$  aralığındaki  $q$ -Bernstein taban fonksiyonları için

$$\frac{\prod_{i=1}^n (x - tq^{i-1})}{\prod_{i=1}^n (b - aq^{i-1})} = \sum_{j=0}^n (-1)^j q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{B_{n-j}^n \left( x; [aq^{n-1}, b]; \frac{1}{q} \right) B_j^n (t; [a, b]; q)}{\left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_{\frac{1}{q}}}$$

eşitliği sağlar (Simeonov vd. 2010).

**İspat.** Önceki teoreme benzer olarak yapılır.

**Önerme 4.3.3**  $i = 0, \dots, n$  olmak üzere  $\forall t^i$  kuvvet bazı için

$$t^i = \sum_{k=i}^n \frac{\left[ \begin{matrix} k \\ i \end{matrix} \right]_q}{\left[ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right]_q} B_k^n (t; q)$$

eşitliği gerçekleşir (Simeonov vd. 2010).

**İspat.** Bu sonuç Teorem 4.2.1'den ve  $M_k^n (t) = t^k$  tek terimlerinin  $q$ -tomurcuk fonksiyonu

$$m_k^n (u_1, \dots, u_n; q) = \frac{\varphi_{n,k} (u_1, \dots, u_n)}{\varphi_{n,k} (1, q, \dots, q^{n-1})}$$

$$\varphi_{n,k} (1, q, \dots, q^{n-1}) = q^{\frac{k(k-1)}{2}} \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q \text{ ve ayrıca } \forall k \geq i \text{ için}$$

$$\varphi_{n,i} (0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{n-1}) = \varphi_{k,i} (1, q, \dots, q^{k-1})$$

olmasından elde edilir. Gerçekten

$$\begin{aligned}
P(t) &= \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t; q) \\
&= \sum_{i=0}^n p(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{i-1}; q) B_i^n(t; q) \\
&= \sum_{i=0}^n \frac{\varphi_{n,i}(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{i-1}; q)}{\varphi_{n,i}(1, q, \dots, q^{i-1}; q)} B_i^n(t; q) \\
&= \sum_{i=0}^n \frac{\varphi_{n,i}(0, \dots, 0, 1, q, \dots, q^{i-1}; q)}{q^{\frac{i(i-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q} B_i^n(t; q) \\
&= \sum_{i=0}^n \frac{q^{\frac{i(i-1)}{2}} \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix}_q}{q^{\frac{i(i-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q} B_i^n(t; q)
\end{aligned}$$

$0 < k < i$  için  $\begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix}_q = 0$  olduğundan

$$P(t) = \sum_{k=i}^n \frac{\begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix}_q}{\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q} B_i^n(t; q)$$

bulunur.

**Önerme 4.3.4** Sabit ve lineer fonksiyonlar için sırasıyla

i)  $\forall q$  için

$$1 = \sum_{k=0}^n B_k^n(t; [a, b]; q)$$

ii)  $q = -1$  ve  $n$  çift durumu hariç

$$t = \sum_{k=0}^n \left( a + \frac{\begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix}_q}{\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q} (b - a) \right) B_k^n(t; [a, b]; q)$$

eşitlikleri gerçekleşir (Simeonov vd. 2010).

**İspat.** *i)*  $P(t) = 1$  sabit polinomunun  $q$ -tomurcuk fonksiyonu  $p(u_1, \dots, u_n; q) = 1$  dir. Gerçekten  $t^k, k = 0, \dots, n$  tek terimlerinin  $q$ -tomurcuk fonksiyonu  $\frac{\varphi_{n,k}(u_1, \dots, u_n; q)}{q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q}$

olduğundan  $k = 0$  için  $\frac{\varphi_{n,0}(u_1, \dots, u_n; q)}{\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q} = 1$  dir.

Böylece sabit fonksiyonun  $q$ -tomurcuk fonksiyonu her  $q$  değeri için var olduğundan Teorem 4.2.2 yardımıyla

$$\begin{aligned} 1 &= P(t) \\ &= \sum_{k=0}^n P_k B_k^n(t; [a, b]; q) \\ &= \sum_{k=0}^n p(aq^k, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{k-1}; q) B_k^n(t; [a, b]; q) \\ &= \sum_{k=0}^n B_k^n(t; [a, b]; q) \end{aligned}$$

bulunur.

*ii)*  $P(t) = t$  polinomunun  $q$ -tomurcuk fonksiyonu

$$\begin{aligned} p(u_1, \dots, u_n; q) &= \frac{\varphi_{n,1}(u_1, \dots, u_n)}{\varphi_{n,1}(1, q, \dots, q^{n-1})} \\ &= \frac{\sum_{1 \leq i_1 \leq n} u_{i_1}}{\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q} \\ &= \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q} \end{aligned}$$

dir. Teorem 4.2.2 göz önüne alındığında

$$P(t) = \sum_{k=0}^n P_k B_k^n(t; [a, b]; q)$$

olup  $P(t) = t$  ve  $\forall q \neq 0$  ve  $q \neq -1$  için  $B_k^n(t; [a, b]; q)$   $q$ -Bernstein taban fonksiyonunun katsayısı

$$\begin{aligned}
P_k &= p(aq^k, \dots, aq^{n-1}, b, bq, \dots, bq^{k-1}; q) \\
&= \frac{aq^k + \dots + aq^{n-1} + b + bq + \dots + bq^{k-1}}{[n]_q} \\
&= \frac{a[(1+q+\dots+q^k+\dots+q^{n-1}) - (1+q+\dots+q^{k-1})] + b(1+q+\dots+q^{k-1})}{[n]_q} \\
&= \frac{a([n]_q - [k]_q) + b[k]_q}{[n]_q} \\
&= a + \frac{[k]_q}{[n]_q} (b - a)
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
t &= \sum_{k=0}^n P_k B_k^n(t; [a, b]; q) \\
&= \sum_{k=0}^n \left( a + \frac{[k]_q}{[n]_q} (b - a) \right) B_k^n(t; [a, b]; q)
\end{aligned}$$

elde edilir.

**Önerme 4.3.5**  $r \rightarrow rt$  dönüşümü  $[0, 1]$  aralığını  $[0, r]$  aralığına dönüştürmek üzere Bernstein taban fonksiyonları için yeniden parametrelendirme formülü

$$B_k^n(rt; q) = \sum_{i=k}^n B_k^i(r; q) B_i^n(t; q)$$

dir (Simeonov vd. 2010).

**İspat.**  $F$  ve  $G$ ,  $q$ -tomurcuk fonksiyonları  $f$  ve  $g$  olan  $n$ -inci dereceden polinomlar olsunlar. Eğer

$$F(t) = G(rt)$$

ise bu durumda

$$f(u_1, \dots, u_n; q) = g(ru_1, \dots, ru_n; q)$$

gerçeklenir. Çünkü  $f(u_1, \dots, u_n; q)$  için sağlanan üç tomurcuk fonksiyonu aksiyomu  $g(ru_1, \dots, ru_n; q)$  için de sağlamır.

Teorem 4.2.1, Lemma 4.2.1 ve  $q$  diagonal özelliğinden

$$\begin{aligned} B_k^n(rt; q) &= \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t; q) \\ &= \sum_{i=0}^n b_k^n(0, \dots, 0, r, rq, \dots, rq^{i-1}; q) B_i^n(t; q) \end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} b_k^n(0, \dots, 0, r, rq, \dots, rq^{i-1}; q) &= \sum_{k=0}^n \frac{\varphi_{n,k}(0, \dots, 0, r, rq, \dots, rq^{i-1}; q)}{\varphi_{n,k}(1, q, \dots, q^{n-1})} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\varphi_{i,k}(r, rq, \dots, rq^{i-1}; q)}{\varphi_{n,k}(1, q, \dots, q^{n-1}; q)} \end{aligned}$$

toplamı  $\forall k \leq i$  için mevcut olduğundan

$$\begin{aligned} B_k^n(rt; q) &= \sum_{i=k}^n b_k^i(r, rq, \dots, rq^{i-1}; q) B_i^n(t; q) \\ &= \sum_{i=k}^n B_k^i(r; q) B_i^n(t; q) \end{aligned}$$

elde edilir.

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Polinom tipli eğriler bir çok alanda uygulaması olan, özellikle bilgisayar destekli geometrik tasarımlarda sıklıkla kullanılan eğrilerdir. İlk kez Citroën’de çalışan fizikçi ve matematikçi (Casteljau 1959) ve Renault’da çalışan Fransız mühendis (Bézier 1970) in serbest şekil verilmiş yüzeyleri matematiksel ifade etme çabasıyla başlayan modelleme süreci günümüze kadar devam etmiştir.

Uçak ve otomotiv sektöründe karşımıza çıkan serbest şekil verilmiş yüzeylere en iyi yaklaşımın yapılabilmesi konusunda Bernstein polinomlarının taban fonksiyonu kullanılarak elde edilen Bézier eğrilerinin kontrol noktaları tercih edilir. Çünkü bir Bézier eğrisi, kendisini tanımlayacak olan kontrol noktaları ile birebir ilişkilidir. İlk ve son kontrol noktaları eğri üzerinde bulunup diğer noktalar eğrinin derecesini belirlemeye yardımcı olurlar. Eğrinin kontrol noktalarının herhangi birinde yapılan bir değişiklik eğrinin geneli üzerinde bir etkiye sahiptir.

Oldukça büyük bir öneme sahip olan Bézier eğrilerinin kontrol noktalarının belirlenmesi sürecinde tomurcuk (blossom) adı verilen bir fonksiyon kullanılmaktadır. Sahip olduğu özellikler, bu fonksiyonu Bernstein taban fonksiyonları için eşitlikler elde edilmesinde, bilgisayar destekli geometrik tasarımlarda yer alan algoritmalarda ve özel olarak Bézier eğrilerini bölmeye yarayan *Casteljau algoritmasında* önemli hale getirmektedir. Bu parçalama işleminde kullanılan her iterasyon eğrinin tanımlı olduğu aralığın orta noktasında yapıldığında orta nokta parçalanması ile oluşturulan kontrol çokgenlerinin eğriye doğru yaklaştığı görülür.

Son yıllarda oldukça ilgi toplayan ve bununla ilgili olarak önemli sonuçlar elde edilen  $q$  tamsayılarına dayalı Bernstein polinomlarını (Phillips 1996) tanımlamıştır. Bu polinomlara ait taban fonksiyonları kullanılarak  $q$ -Bézier eğrileri elde edilmiş ve eğrilerin yaklaşım özellikleri algoritmalar yardımıyla ifade edilmiştir (Oruç ve Phillips 2003). Belirli özelliklere sahip özel bir fonksiyon olan tomurcuk fonksiyonunun  $q$  genellemesinin  $q$ -Bézier eğrileri ile olan ilişkisi (Simeonov vd. 2010) tarafından in-



celenmiştir.

Programlanması oldukça kolay olan bu eğriler günümüzde fontların tasarımında, otomobil, gemi, uçak gövdesi ve kanadı tasarımında kullanım alanı bulmaktadır.

Bu tezde Bézier eğrilerinin kullanım alanındaki önemi ve tasarımcılara kolaylık sağlanması açısından, önce Bézier eğrileri ve sonrasında  $q$ -Bézier eğrileri detaylı olarak incelenmiştir. Bu alanda yapılmış çalışmalarda elde edilen teoremler, önermeler ve sonuçlar verilmiştir. Önemli bir teorem olarak her polinomun bir  $q$ -Bézier eğrisi şeklinde ifade edilebileceği verilmiştir. Dahası Bernstein taban fonksiyonlarının sahip olduğu "tek ekstremuma sahip olma" özelliğinin Bézier eğrileri ve  $q$  parametresi değişiminin  $q$ -Bézier eğrileri üzerindeki etkisi örnekler verilerek desteklenmiştir.

$q$ -analizin önemli bir çalışma alanı olmasından dolayı, bilgisayar destekli geometrik tasarımlarda yaygın kullanım alanı bulan bu eğrilerin  $q$ -Bernstein taban fonksiyonuna dayalı olarak yapılan  $q$  genellemesi ve bununla ilgili elde edilecek sonuçlar istenilen eğri ya da yüzeye yaklaşım açısından oldukça büyük öneme sahiptir.

## KAYNAKLAR

- Bernstein, S.N. 1912. Demonstration du theoreme de Weierstrass fondee, Commun. Kharkov Math. Soc. 13, 1-2.
- Bézier, P.E. 1972. Numerical Control-Mathematics and applications, John Wiley and Sons, London.
- Farin, G., Hoscheck, J. and Kim, M.-S. 2002. Handbook of Computer Aided Geometric Design.
- Farouki, R.T. 2012. The Bernstein polynomial basis: a centennial retrospective, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, University of California, Davis, 18-22.
- Goldman, R. 1985. Polya's urn model and computer aided geometric design. SIAM J. Algebraic Discrete Methods 6, 1-28.
- Goldman, R. 2002. Pyramid Algorithms: A Dynamic Programming Approach to Curves and Surfaces for Geometric Modeling, Morgan Kaufmann Publishers, Academic Press, San Diego.
- Halmos, P. R. 1974. Finite-Dimensional Vector Spaces, Springer-Verlag, USA.
- Han, X.W., Chu, Y. and Qui, Z.Y. 2013. Generalized Bézier curves and surfaces based on Lupaş  $q$ -analogue of Bernstein operator, Journal of Computational and Applied Mathematics 261, 352-363.
- Joy, K. 2000. On-Line Geometric Modeling Notes, Computer Science Department, University of California, Davis.

- Kac, V. and Cheung, P. 2002. Quantum Calculus, Universitext Series IX, Springer-Verlag.
- Kaspar, C. 2009. MSM Creative Component. Using Bézier Curves for Geometric Transformations.
- Lupaş, A. 1987. A  $q$ -analogue of the Bernstein operator, Sem. Numer. Statist. Calc. 9, 85-92.
- Oruç, H. and Phillips, G.M. 2003.  $q$ -Bernstein polynomials and Bézier curves, J. Comput. Appl. Math. 151, 1-12.
- Phillips, G.M. 1996. On generalized Bernstein polynomials, Numerical analysis, 263-269. A.R.Mitchell 75th Birthday Volume.
- Phillips, G.M. 1997a. Bernstein polynomials based on the  $q$ -integers. Ann. Numer. Math. 4, 511-518.
- Phillips, G.M. 1997b. A de Casteljaun Algorithm for generalized Bernstein polynomials. BIT 37, 232-236.
- Phillips, G.M. 2003. Interpolation and Approximation by Polynomials, CMS Books in Mathematics, Springer-Verlag, New York.
- Phillips, G.M. 2010. A survey of results on the  $q$ -Bernstein polynomials. IMA J. Numer. Anal. 30, 277-288.
- Ramshaw, L. 1989. Blossoms are polar forms, Comput. Aided Geom. Design 6, 323-358.

Simeonov, P., Zafiris, V. and Goldman, R. 2010a.  $q$ -Blossoming: A new approach to algorithms and identities for  $q$ -Bernstein bases and  $q$ -Bézier curves. *J. Approx. Theory* 164, 77-104.

Simeonov, P., Zafiris, V. and Goldman, R. 2010b.  $h$ -Blossoming: A new approach to algorithms and identities for  $h$ -Bernstein bases and  $h$ -Bézier curves, *Comput. Aided Geom. Design* 28, 549-565.

Szegö, G. 1967. *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society, Colloquium Publications, Volume 23.

## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı** : Melike SARAÇ  
**Doğum Yeri** : Çankırı  
**Doğum Tarihi** : 10.07.1990  
**Medeni Hali** : Bekar  
**Yabancı Dili** : İngilizce

### Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

**Lise** : Ankara Ayrancı Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi (2008)  
**Lisans** : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2012)  
Ankara Üniversitesi Siyasal Bilgiler Fakültesi İşletme Bölümü (2013)  
(Yandal)  
**Yüksek Lisans** : Hacettepe Üniversitesi Nüfus Etütleri Enstitüsü  
Sosyal Araştırma Yöntemleri Anabilim Dalı (Şubat 2014 - ...)  
Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2012 - Şubat 2015)

### Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

1. Hacettepe Üniversitesi Nüfus Etütleri Enstitüsü  
ÖYP Araştırma Görevlisi (Şubat 2014 - ...)