

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PAINLEVÉ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ



Arzu ÖĞÜN

120901

MATEMATİK ANABİLİM DALI

120901

ANKARA
2002

Prof. Dr. Cevat KART danışmanlığında, Arzu ÖĞÜN tarafından hazırlanan bu çalışma
31.07.2002 tarihinde aşağıdaki juri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek
Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Cevat KART

İmza:



Üye : Prof. Dr. Ethem ANAR

İmza:



Üye : Yard. Doç. Dr. Nuri ÖZALP

İmza:



Yukarıdaki sonrakı onaylarım

Enstitü Müdürü Prof. Dr. Metin OLGUN



ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PAINLEVÉ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİ

Arzu Öğün

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Cevat KART

Bu tez dört bölümünden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, diferensiyel denklemlerin aykırı noktaları hakkında bilgiler verildi.

İkinci bölümde, Painlevé denklemlerinin tarihsel gelişimi ve Painlevé özelliği üzerinde duruldu. Painlevé ve arkadaşları sabit kritik noktalı 50 denklem varlığını gösterdiler. Sabit kritik noktalı yani kanonik formda P-türünde olan bu denklemler bu bölümde verildi. Denklemler hakkında bilgilere de ayrıca değinildi.

Üçüncü bölümde, Painlevé testi hakkında bazı ön bilgiler verildikten sonra, ikinci veya üçüncü basamaktan bir diferensiyel denklem, Painlevé özelliğine sahip olup olmayacağına dair bir inceleme ele alındı.

Son bölümde, sabit kritik noktalı denklemler arasında ayricalıklı olmalarından dolayı Painlevé Denklemleri olarak adlandırılan altı denklem için genel bilgiler verildi ve bu denklemlerden bir kısmının rasyonel çözümleri üzerinde duruldu.

2002, 64 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Painlevé Diferensiyel Denklemleri, Painlevé Özeliği, Bäcklund Dönüşümü.

ABSTRACT

Master Thesis

PAINLEVÉ DIFFERENTIAL EQUATIONS

Arzu ÖĞÜN

Ankara University
Graduate School of Nature and Applied
Sciences Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Cevat KART

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, some informations are given about singular points of differential equations.

In the second chapter, the historical development of the Painlevé equations and Painlevé property are introduced. Painlevé and his friends showed that there are only fifty types of equations which have the property of having no movable critical points. In this chapter, the equations which have no movable critical points i.e. the equations which are in P-type in canonical form and some informations about these equations are given.

In the third chapter, introducing some of the informations about the Painlevé test whether a second or a third order differential equation has the Painlevé property or not, is investigated.

In the last chapter, general informations about the six equations called as Painlevé equations, which have the privileges in these fifty equations, are given and the rational solutions of some of these equations are investigated.

2002, 64 pages

Key Words: Painlevé Differential Equations, Painlevé Property,
Bäcklund Transformations

TEŞEKKÜR

Bana bu konuda çalışma olanağı veren ve çalışmalarım süresince ilgi ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Prof. Dr. Cevat KART'a teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç biliyim.

Arzu ÖĞÜN
Ankara, Ağustos 2002

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Ön Bilgiler.....	1
2.SABİT KRİTİK NOKTALI DENKLEMLER.....	4
2.1. PAINLEVÉ ÖZELİĞİ.....	4
2.2. KANONİK FORMDA P-TÜRÜNDE DENKLEMLER.....	5
2.2.1. Denklemelerin Katsayıları Hakkında Bilgiler.....	9
2.2.2. Denklemler Hakkında Genel Bilgiler.....	10
3. PAINLEVÉ TESTİ.....	11
4. PAINLEVÉ DENKLEMLERİ.....	33
4.1. PAINLEVÉ DENKLEMLERİ İÇİN GENEL BİLGİLER.....	33
4.2. PAINLEVÉ DENKLEMLERİNİN RASYONEL ÇÖZÜMLERİ.....	35
4.2.1. Korteweg de Vries ve Modifiye Korteweg de Vries Denklemelerinin Benzerlik Çözümleri.....	36
4.2.2. P_2 Denkleminin Çözümleri.....	38
4.2.3. P_2 Denklemi İçin Elde Edilen Sonuçların Daha Yüksek Basamaktan Denklemler için Genişletilmesi.....	47
4.2.4. P_4 Denklemi İçin Bir Bäcklund Dönüşümü.....	51
4.2.5. P_3 Denkleminin Çözümleri.....	57
4.2.6. P_3 Denkleminin P_3 Denklemine İndirgenmesi.....	60
KAYNAKLAR.....	63
ÖZGEÇMİŞ.....	64

1. GİRİŞ

1.1 Ön Bilgiler

Çeşitli tabiat olayları karşımıza çoğunlukla lineer olmayan türden diferensiyel denklemler çıkarmaktadır. Bu türden denklemleri analitik olarak (kapalı form) çözebilmenin genel yöntemleri olmadığından bu biçimdeki denklemlerin incelenmesi oldukça zorluk arz etmektedir. Öte yandan çok sayıda özellikler ve güzellikler bu tür denklemler tarafından kontrol edilmektedir.

Çeşitli açılardan bu denklemlere yaklaşarak bu denklemlerden bir şeyler yakalayabilmenin yolları aranmaktadır.

Lineer olmayan önemli bir denklem sınıfı, 20. asırın başlarında Paul Painlevé (1863-1933, Fransız) ve arkadaşları (E. Picard, L. Fuchs, R. Fuchs, J. Chazy, B. Gambier, S. Kowalevski, R. Garnier) tarafından ele alınmıştır. Bu matematikçiler sözü edilen denklem sınıfını, denklemleri *aykırı noktalar* açısından ele alarak incelediler (Sachdev 1991, Ablowitz ve Clarkson 1992).

Aykırı noktalar ve diferensiyel denklem ilişkileri hakkında temel bilgiler, bu konuda daha önce yapılan bir çalışmada verilmektedir (Yıldız 1998). Aykırı noktalar *sabit* ya da *hareketli* olabilir. Bir lineer diferensiyel denklem için aykırı nokta denildiğinde denklemin katsayılarının, lineer olmayan diferensiyel denklem için aykırı nokta denildiğinde denklemin çözümlerinin aykırı noktaları kastedilmektedir. Lineer diferensiyel denklemlerin aykırı noktaları sabit olduğu halde, lineer olmayan diferensiyel denklemlerin aykırı noktaları çoğunlukla hareketli olmak üzere sabit ve hareketli olabilir.

Sabit ve hareketli aykırı noktalar; kutup, dallanma noktası (cebirsel, logaritmik) ya da esas aykırı nokta olarak karşımıza çıkabilir (Davis 1962, Hille 1976. Anasov ve Arnold 1985, Sachdev 1991, Ablowitz ve Clarkson 1992).

Hareketli aykırı noktalara sahip bazı denklemleri ele alalım:

Örnek 1.1

$$\frac{dw}{dz} = 1 + w^2 \quad ; \quad w(z_0) = 0$$

probleminin çözümü, $w = \tan(z - z_0)$ biçimindedir. Bu çözüm $z = z_0 + (2n+1)\frac{\pi}{2}$ şeklinde hareketli aykırılıklara sahiptir ve bunlar basit kutuplardır.

Örnek 1.2

$$my'y^{m-1} = 1 \quad , \quad m \in \mathbb{N}$$

denkleminin çözümü $y = (t - c)^{1/m}$ şeklindedir. $c \in \mathbb{C}$ bir integrasyon sabitidir. $y(t)$ çözümü $t = c$ de hareketli cebirsel dallanma noktasına sahiptir.

Örnek 1.3

$$\frac{du}{dx} + \frac{u^2}{x} = 0$$

denklemi $u = \frac{1}{c + \ln x}$ çözümüne sahiptir. Bu çözüm hem sabit logaritmik dallanma noktasına hem de hareketli basit kutuplara sahiptir.

Örnek 1.4

$$y'' + y'^2 = 0$$

denklemi $y = \ln(t - c_1) + c_2 \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ çözümüne sahiptir. Bu çözüm logaritmik dallanma noktalarına sahiptir.

Örnek 1.5

$$yy'' + y'^2 \left[2\left(\frac{y}{y'}\right)^{1/2} - 1 \right] = 0$$

denklemi $y = c_1 e^{-\frac{1}{t-c_2}}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ çözümüne sahiptir. Bu çözüm de $t = c_2$ de hareketli esas aykırı noktalara sahiptir.

Bir diferensiyel denklem bir çözümü, çeşitli türlerdeki aykırılıklara sahip olabilir. Kutup dışında herhangi bir aykırı nokta bir *kritik nokta* olarak adlandırılır. Bir kritik nokta, bir dallanma noktası ya da bir esas aykırı nokta olabilir. Dallanma noktaları, sonlu sayıda dala (iki ya da daha fazla) ya da sonsuz sayıda dala sahip olabilir. Bu tür dallanma noktaları sırasıyla *cebirsel* ya da *logaritmik* dallanma olarak adlandırılır.

Yukarıda olduğu üzere lineer olmayan diferensiyel denklemleri inceleyerek çözümlerini bulup ne tür aykırılıklara sahip olduğunu belirtmek genel olarak mümkün değildir. O halde denklemi çözmeden ya da çözemeden denklemin çözümleri hakkında neler söylenebilir sorusu, çeşitli bilimsel yaklaşımlar açısından, çağımızın en önemli problemlerinden birisidir. Bu alanda sayılamayacak coğulukta çalışma yapılmıştır ve yapılmaktadır. Bu çalışmada, bu alanda yapılan çalışmalardan bazı güzellikler ortaya konulacaktır.

2. SABİT KRİTİK NOKTALI DENKLEMLER

2.1 Painlevé Özeliği

F, w ve w' ye göre rasyonel, z'ye göre analitik bir fonksiyon olmak üzere

$$\frac{d^2w}{dz^2} = F(z, w, w') \quad (2.1.1)$$

denklemini göz önüne alalım. 1887 yılında E. Picard, ifadesi aşağıda verilen bir problem ortaya koydu:

Acaba, (2.1.1) biçimindeki hangi tür denklemlerin çözümleri hareketli aykırılıklar olarak sadece kutuplara sahiptir? Ya da başka bir anlatım ile, (2.1.1) biçimindeki hangi tür denklemlerin çözümleri sabit kritik noktalara sahiptir? Painlevé ve arkadaşları yoğun biçimde bu problem üzerine eğildiler ve hareketli aykırılıkları sadece kutuplar olan bir denklem sınıfı ortaya koydular.

Tanım 2.1.1 Kompleks düzlemden bir diferensiyel denklemenin ya da diferensiyel denklem sisteminin çözümleri sadece sabit kritik noktalara sahip ise bu durumda, denklem ya da sistem *Painlevé özelliğine sahiptir* ya da *P-türüündendir* denir (Steeb ve Euler 1988, Sachdev 1991, Ablowitz ve Clarkson 1992).

Bu tanım çok sonraları Ablowitz, Ramani, Segur (ARS 1978) tarafından verilmiştir. Yeri gelmişken belirtelim ki genelleştirilmiş Riccati denklemi Painlevé özelliğine sahip birinci basamaktan tek denklemdir. Sözü edilen problemin incelenmesinde kullanılan genel yöntem α -yöntemi olarak adlandırılmaktadır ve bu yöntem Painlevé'ye aittir (Ince 1956). İncelemeler sonucunda *sabit kritik noktalı kanonik formda* tam 50 denklem ortaya konmuştur:

2.2. Kanonik Formda P-Türünde Denklemeler

$$1. \quad w'' = 0$$

$$2. \quad w'' = 6w^2$$

$$3. \quad w'' = 6w^2 + \frac{1}{2}$$

$$4. \quad w'' = 6w^2 + z$$

$$5. \quad w'' = [q(z) - 2w]w' + q'(z)w$$

$$6. \quad w'' = -[q(z) + 3w]w' - q(z)w^2 - w^3$$

$$7. \quad w'' = 2w^3$$

$$8. \quad w'' = \alpha + \beta w + 2w^3$$

$$9. \quad w'' = 2w^3 + zw + \alpha$$

$$10. \quad w'' = -ww' + w^3 - 12q(z)w + 12q'(z)$$

$$11. \quad ww'' = w'^2$$

$$12. \quad ww'' = w'^2 + \alpha + \beta w + \gamma w^3 + \delta w^4$$

$$13. \quad zww'' = zw'^2 - ww' + \alpha z + \beta w + \gamma w^3 + \delta zw^4$$

$$14. \quad ww'' = w'^2 + [q(z)w^2 + r(z)]w' + q'(z)w^3 - r'(z)w$$

$$15. \quad ww'' = w'^2 + w' + r(z)w^3 - w^2 \frac{d}{dz} \left[\frac{r'(z)}{r(z)} \right]$$

$$16. \quad ww'' = w'^2 - q'(z)w' + w^4 - q(z)w^3 + q''(z)w$$

$$17. \quad ww'' = \frac{m-1}{m} w'^2$$

$$18. \quad ww'' = \frac{1}{2} w'^2 + 4w^3$$

$$19. \quad ww'' = \frac{1}{2} w'^2 + 4w^3 + 2w^2$$

$$20. \quad ww'' = \frac{1}{2} w'^2 + 4w^3 + 2zw^2$$

$$21. \quad ww'' = \frac{3}{4}w'^2 + 3w^3$$

$$22. \quad ww'' = \frac{3}{4}w'^2 - w$$

$$23. \quad ww'' = \frac{3}{4}w'^2 + 3w^3 + \alpha w^2 + \beta w$$

$$24. \quad ww'' = \frac{m-1}{m}w'^2 + q(z)w^2w' + \frac{mq'(z)}{m+2}w^3 - \frac{mq^2(z)}{(m+2)^2}w^4$$

$$25. \quad ww'' = \frac{3}{4}w'^2 + \left[\frac{q'}{2q}w - \frac{3}{2}w^2 \right]w' + qw + rw^2 + \frac{q'}{2q}w^3 - \frac{1}{4}w^4$$

$$26. \quad ww'' = \frac{3}{4}w'^2 + 6q'w' - 36q'^2 - 12q''w + 12qw^2 + 3w^3$$

$$27. \quad ww'' = \frac{m-1}{m}w'^2 + \left(-\frac{m-2}{m} + fw + gw^2 \right)w' - \frac{1}{m} - fw + hw^2 \\ + \frac{m}{m+2}(g' - fg)w^3 - \frac{m}{(m+2)^2}g^2w^4$$

$$28. \quad ww'' = \frac{1}{2}w'^2 + (qw - w^2)w' - 72p^2 + 3\left(q' + \frac{1}{2}q^2\right)w^2 - 2qw^3 + \frac{1}{2}w^4$$

$$29. \quad ww'' = \frac{1}{2}w'^2 + \frac{3}{2}w^4$$

$$30. \quad ww'' = \frac{1}{2}w'^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 + 2\beta w^2 + 4\gamma w^3 + \frac{3}{2}w^4$$

$$31. \quad ww'' = \frac{1}{2}w'^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 + 2(z^2 - \beta)w^2 + 4zw^3 + \frac{3}{2}w^4$$

$$32. \quad ww'' = \frac{1}{2}w'^2 - \frac{1}{2}$$

$$33. \quad ww'' = \frac{1}{2}w'^2 - \frac{1}{2} + \alpha w^2 + 4w^3$$

$$34. \quad ww'' = \frac{1}{2}w'^2 - \frac{1}{2} - zw^2 + 4\alpha w^2, \quad \alpha \equiv 0$$

$$35. \quad ww'' = \frac{2}{3}w'^2 + \left(p + \frac{2}{3}qw - \frac{2}{3}w^2 \right)w' - 3p^2 + (2pq - 3p')w \\ + \left(p + 4q' + \frac{8}{3}q^2 \right)w^2 - \frac{10}{3}qw^3 + \frac{2}{3}w^4$$

$$36. \quad ww'' = \frac{4}{5}w'^2 + \left(p - \frac{4}{5}qw - \frac{2}{5}w^2 \right)w' - \frac{5}{9}p^2 - \frac{1}{3}(pq + 5p')w \\ + \left(p - 3q' + \frac{6}{5}q^2 \right)w^2 + \frac{11}{5}qw^3 + \frac{4}{5}w^4$$

$$37. \quad (w - w^2)w'' = \frac{1}{2}(1 - 3w)w'^2$$

$$38. \quad (w - w^2)w'' = \frac{1}{2}(1 - 3w)w'^2 + \alpha w^2(1 - w)^3 + \beta(1 - w)^3 \\ + \gamma w^2(1 - w) + \delta w^2$$

$$39. \quad z^2(w - w^2)w'' = \frac{1}{2}z^2(1 - 3w)w'^2 - zw(1 - w)w' + \alpha w^2(1 - w)^3 \\ + \beta(1 - w)^3 + \gamma zw(1 - w) + \delta z^2 w^2(1 + w)$$

$$40. \quad (w - w^2)w'' = (1 - 3w)w'^2 + 2(pw + qw^2)w' + (1 - w)^3(s^2 w^2 - t^2) \\ + 2w^2(1 - w)[q^2 - p^2 + (p' + q')]$$

$$41. \quad (w - w^2)w'' = \frac{2}{3}(1 - 2w)w'^2$$

$$42. \quad (w - w^2)w'' = \frac{2}{3}(1 - 2w)w'^2 + [pw + q(1 - w) + rw^2(1 - w) \\ - \frac{1}{2}(p + q + r)w(1 - w)]w' + 3pw^2 - 3q^2(1 - w)^2 \\ - 3r^2w^3(1 - w)^2 - \left[3r' + \frac{3}{2}r(p + q - r)\right]w^2(1 - w)^2 \\ - \left[3q' - \frac{3}{2}q(p + q - r)\right]w(1 - w)^2 \\ + \left[3p' - \frac{3}{2}p(p + q + r)\right]w^2(1 - w)$$

$$43. \quad (w - w^2)w'' = \frac{3}{4}(1 - 2w)w'^2$$

$$44. \quad (w - w^2)w'' = \frac{3}{4}(1 - 2w)w'^2 + \alpha w(1 - w)^2 + \beta w^2(1 - w) + 2\gamma w^2(1 - w)^3$$

$$45. \quad (w - w^2)w'' = \frac{3}{4}(1 - 2w)w'^2 + [\alpha w(1 - w) + \beta(1 - w) + \gamma w]w' \\ + 4\delta^2 w^2(1 - w)^2(1 - 2w) - \beta^2(1 - w)^2 + \gamma^2 w^2 \\ - h w(1 - w)^2 + k w^2(1 - w)$$

$$46. \quad (w - w^2)w'' = \frac{3}{4}(1 - 2w)w'^2 + \frac{1}{2} \frac{H'}{H} (w + 2w^2)w' \\ + \frac{4\alpha^2}{H^2} w^2 (1 - w)^2 (1 - 2w) + \frac{3}{4} \left(\frac{H'}{H} \right)^2 w^2 (1 + 2w) \\ + 3 \left(\frac{H'}{H} \right)' w^2 (1 - w) - Hw(1 - w)^2$$

$$47. \quad (w - w^2)w'' = \frac{3}{4}(1 - 2w)w'^2 + \frac{1}{2} \frac{H'}{H} w(2w + 1)w' \\ + w^2 (1 - w)^2 (1 - 2w) \frac{(2\alpha + 1)^2}{H^2} + \left(\frac{3H'}{2H} \right)^2 w^2 \\ - Hw(1 - w)^2 + \frac{3}{2} \left[2 \left(\frac{H'}{H} \right)' - \left(\frac{H'}{H} \right)^2 \right] w^2 (1 - w)$$

$$48. \quad (w - w^2)w'' = \frac{1}{6}(4 - 7w)w'^2 + (1 - w)(\alpha w^2 + \beta w + \gamma)w' \\ - \frac{3}{8}\alpha^2 w^3 (1 - w)^2 - fw^2 (1 - w)^2 - 3\gamma^2 (1 - w)^2 \\ - gw^2 - hw(1 - w)^2 + \frac{1}{3}gw^2 (1 - w)$$

$$49. \quad w(1 - w)(\alpha - w)w'' = \frac{1}{2} [\alpha - 2(\alpha + 1)w + 3w^2]w'^2 + \beta w^2 (1 - w)^2 (\alpha - w)^2 \\ + \gamma(1 - w)^2 (\alpha - w)^2 + \delta w^2 (\alpha - w)^2 + \sigma w^2 (1 - w)^2$$

$$50. \quad w(1 - w)(z - w)w'' = \frac{1}{2} [z - 2(z + 1)w + 3w^2]w'^2 \\ + \frac{w(1 - w)}{z(1 - z)} [z^2 + (1 - 2z)w]w' \\ + \frac{1}{2z^2(1 - z)^2} [\alpha w^2 (1 - w)^2 (z - w)^2 - \beta z(1 - w)^2 (z - w)^2 \\ - \gamma(1 - z)w^2 (z - w)^2 - \delta z(1 - z)w^2 (1 - w)^2]$$

2.1.1 Denklemelerin katsayıları hakkında bilgiler

10 nolu denklemde $c = 0, l, z$ olmak üzere $q, q'' = 6q^2 + c$ denklemini sağlamaktadır.

26 nolu denklemde $c = 0, \frac{1}{2}, z$ olmak üzere $q, q'' = 6q^2 + c$ denklemini sağlamaktadır.

28 nolu denklemde $p = \frac{1}{2}(v_2 - v_1), q = \frac{v'_2 - v'_1}{v_2 - v_1}$ ifadelerini sağlar, $v_1, v_2 ; c = 0, \frac{1}{2}, z$

olmak üzere $v'' = 6v^2 + c$ denkleminin çözümleridir.

35 nolu denklemde $p = -\frac{1}{3}S - \frac{2}{3}(q' + q^2)$ ifadesini ve

$q; S = 0, \beta, z$ ve $T = 0, \alpha, \alpha$ olmak üzere $q'' = 2q^3 + Sq + T$ denklemini sağlar.

36 nolu denklemde $p = \frac{72}{5}v_1 + \frac{36}{5}v_2 - \frac{9}{5}\left(\frac{v'_2 - v'_1}{v_2 - v_1}\right)^2, q = \frac{v'_2 - v'_1}{v_2 - v_1}$ ifadelerini

sağlar ve $v_1, v_2, S = 0, \frac{1}{2}, z$ olmak üzere $v'' = 6v + S$ denkleminin çözümleridir.

40 nolu denklemde $s' = -2qs, t' = 2tp$ ifadelerini sağlar.

42 nolu denklemde $3p = 2v_1, 3q = \frac{v'_1}{v_1} + v_1 + \frac{E}{v_1} + 2C, 3r = \frac{v'_1}{v_1} - v_1 + \frac{E}{v_1} - 2C$ ifadeleri

sağlanır ve $v_1, 2vv'' = v'^2 + 3v^4 + 8Cv^3 + 4Dv^2 - E^2$ denkleminin herhangi bir çözümüdür.

45 nolu denklemde

$$\alpha = \frac{v'_2 - v'_1}{v_2 - v_1}, \beta - \gamma = -\frac{3}{2}(v_1 + v_2), \beta + \gamma = -\frac{3}{2}\frac{v'_2 - v'_1}{v_2 - v_1}, \delta = \frac{1}{2}(v_2 - v_1), h = 2\beta + \alpha\beta$$

$k = 2y' + \alpha y$ ifadelerini sağlar ve $v_1, v_2; S = 0, \beta, z$ ve $T = 0, \alpha, \alpha$ olmak üzere $v'' = 2v^3 + Sv + T$ denkleminin çözümleridir.

46 nolu denklemde $H = 2(v'_1 + v_1^2) + \beta$ ifadesini sağlar ve $v_1, v'' = 2v^3 + \beta v + \alpha$ denkleminin herhangi bir çözümüdür.

47 nolu denklemde $H = 2(v'_1 + v_1^2) + z$ ifadesini sağlar ve $v_1, v'' = 2v^3 + zv + \alpha$ denkleminin herhangi bir çözümüdür.

$$48 \text{ nolu denklemde katsayılar } \alpha = -\frac{10}{9}(u+w), \beta = \frac{1}{9}(2u+5w), \delta = -\frac{4}{9}(w-2u),$$

$f = \frac{3}{2}(p' - pq) - \frac{3}{4}, g = -\frac{9}{2}z^2, h = 3(r' - rs) - \frac{3}{2}r^2$ ifadelerini sağlar. Burada;

$$u = \frac{1}{2} \left[\frac{v'_2 - v'_1}{v_2 - v_1} + \frac{v'_3 - v'_1}{v_3 - v_1} \right], \quad z = \frac{1}{2} \left[\frac{v'_2 - v'_1}{v_2 - v_1} - \frac{v'_3 - v'_1}{v_3 - v_1} \right], \quad w = -\frac{z'}{z} \quad \text{şeklindedir} \quad \text{ve}$$

$v_1, v_2, v_3; S = 0, \frac{1}{2}, z$ olmak üzere $v'' = 6v^2 + S$ denkleminin üç özel çözümüdür.

2.2.2 Denklemler hakkında genel bilgiler

Painlevé'ye ait olduğu belirlenen α -yöntemi iki aşamadan oluşmaktadır. İlk aşamada hareketli kritik noktaların olmaması için iki gereklilik koşulu elde edilmekte ve bu gereklilik koşulları sağlayan, sabit kritik noktalı kanonik formda 50 denklemin belirgin formları ortaya konmaktadır.

Bu yöntemde sözü edilen gereklilik koşullarının, doğrudan integrasyon ya da başka tekniklerle aynı zamanda yeterli oldukları gösterilmiştir.

Painlevé ve arkadaşları, başlangıçta sabit kritik noktalı 50 denklemin ortaya çıkarılmasında *sadece* hareketli dallanma noktalarının var olmaması düşüncesiyle hareket ettiler. O tarihlerde hareketli esas aykırı noktaların da var olmamasının ispatı çok zor bir iştı. Ne iyiki esas aykırı noktanın çok seyrek ortaya çıkması bir sorun yaratmadı, yani denklemlerde esas aykırılık durumu ortaya çıkmadı. Durum böylece sürüp gitti. Nihayet 1990 yılında Joshi ve Kruskal, Painlevé denklemlerinin çözümlerinin *hareketli esas aykırılıklara* da sahip olmadığını ispatladılar.

50 denklemden belli 6 tanesi var ki onlar *çok özel* öneme sahiptir ve onlar *Painlevé Denklemleri* olarak özel bir ad alırlar. 50 denklem içerisinde sözü edilen 44 tanesinin çözümleri, ya *klasik elemanter fonksiyonlar* (cebirsel, trigonometrik, ters trigonometrik, üstel, logaritmik) ya *klasik transendant fonksiyonlar* (Airy, Bessel, Weber-Hermite, Whittaker, Hipergeometrik) ya *eliptik fonksiyonlar* (Jacobi, Weierstrass) cinsinden ifade edilebilir ya da Painlevé denklemlerine indirgenebilir.

3. PAINLEVÉ TESTİ

F fonksiyonu $w, w', w'', \dots, w^{(n-1)}$ e göre rasyonel ve z ye göre analitik olmak üzere

$$\frac{d^n w}{dz^n} = F(z, w, w', \dots, w^{(n-1)}) \quad (3.1)$$

ile belirtilen n-yinci basamaktan denklem için bir algoritma, Ablowitz ve arkadaşları (ARS 1980) tarafından verilmektedir. *Algoritma* ile özel türde bir problemi çözmek için, standardize edilmiş herhangi bir yöntem kastedilmektedir. Sözü edilen algoritmada üç adım vardır:

- a) Etkin davranışını bulmak
- b) Rezonansları bulmak
- c) İntegrasyon sabitlerini bulmak

Bu incelemeden bilinmektedir ki algoritma birinci, ikinci ya da üçüncü adımda sona erebilir (Sachdev 1990, Ablowitz ve Clarkson 1992). Ayrıca bu konu üzerinde yapılan bir çalışmada da, bu algoritma üzerinde durulmaktadır (Yıldız 1998).

Bir denklem ya da sistemin çözümü bulunarak çözümlerin ayırt edici nitelikleri ortaya konabilir. Ancak bu çoğunlukla mümkün değildir. Çözüm hiç bulunamayabilir, bazen de bulunsa bile, o kadar karışık olabilir ki çözümlerin ayırt edici nitelikleri ortaya konamayabilir.

Painlevé testi, denklem ya da sistemi çözmeden ya da çözemeden, çözümlerin ayırt edici nitelikleri hakkında bilgi veren son derece önemli ve çağdaş bir yöntemdir. Ancak bu yöntem esas aykırılıkları karakterize etmez ve bu yüzden verilen bir diferensiyel denklemin P-türünde olması için sadece gerek şartları verir.

Örneğin;

$$(w^2 + 1) \frac{d^2 w}{dz^2} = (2w - 1) \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 \quad (3.2)$$

denkleminin çözümü

$$w = \tan[\ln(Az - B)]$$

olarak elde edilir. Burada A ve B keyfi sabitlerdir. Keyfi olarak z nin $\frac{B}{A}$ olarak seçilmesi durumunda w nin sonlu ya da sonsuz limitinin olmaması durumunu göz önüne alalım. Bu taktirde gerçekten fonksiyon $\frac{B}{A}$ noktasında sonsuz sayıda farklı dala sahiptir ve bu hem bir dallanma hem de esas aykırı noktadır. Görüldüğü üzere bu nokta bir hareketli aykırı noktadır. Burada

$$w(z) = (z - z_1)^m \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_1)^k$$

ile belirtilen Laurent açılımını göz önüne alalım. Buna göre (3.2) denkleminden etkin davranışlı denklem

$$w^2 \frac{d^2 w}{dz^2} = 2w \left(\frac{dw}{dz} \right)^2$$

şeklindedir. Bununla beraber $m = -1$ ve a_0 keyfi seçilebilir. Sonuç olarak (3.2) denklemi Painlevé testini kabul eder. Başka bir deyişle denklem, algoritmada tanımlanan gereklilik koşullarını sağlamaktadır. Bununla beraber yeterlilik durumu sağlanmaz. Kısacası Painlevé testini kabul eden her denklem Painlevé özelliğine sahip olmak zorunda değildir. Bunun sebebi, daha önce de belirtildiği üzere yöntemin sadece hareketli dallanma noktalarını karakterize etmesidir.

Bu bölümde, verilen bir diferensiyel denklemin Painlevé özelliğine sahip olup olmadığını anlayabilmek için ilginç bir inceleme ele alınacaktır. 2. ya da 3. basamaktan bir diferensiyel denklemin, Painlevé özelliğine sahip olup olmadığını anlayabilmek için yeterlilik koşullarına ihtiyaç vardır. Bu çeşit koşulların analizi için aşağıdaki teorem esas alınır.

Teorem 3.1

$$f_j(w_1, w_2, \dots, w_m, z), j = 1, \dots, m,$$

$z = z_1$ için $w_1 = w_1^1, w_2 = w_2^1, \dots, w_m = w_m^1$ olmak üzere; w_1, w_2, \dots, w_m değişkenlerinin analitik fonksiyonları olsun. Bu durumda $z = z_1$ noktasında analitik olan ve $w_j(z_1) = w_j^1 \quad (j = 1, \dots, m)$ için

$$\frac{dw_j}{dz} = f_j(w_1, \dots, w_m)$$

diferensiyel denklem sistemini sağlayan bir ve yalnız bir;

$$w_j = w_j(z)$$

fonksiyonlar sistemi vardır.

Şimdi ilk olarak 2. basamaktan bir diferensiyel denklem için yeterlilik koşullarını inceleyelim;

$$\frac{d^2w}{dz^2} = F(w, w', z) \quad (3.3)$$

olsun. Burada f, z ye göre analitik, diğer argümentlere göre de rasyoneldir.

Bir keyfi z_1 noktası komşuluğunda bir serisel çözümü;

$$w(z) = \alpha(z - z_1)^k + \sum_{j=1}^{l-1} a_{k+j}(z - z_1)^{k+j} + c_l(z - z_1)^{k+l} + \sum_{j=l+1}^{\infty} a_{k+j}(z - z_1)^{k+j} \quad (3.4)$$

şeklinde bulduğumuzu kabul edelim. Burada c_l keyfi ve $k < 0$ dir. Bu durumda $z = z_1$, k -inci basamaktan bir kutuptur. (3.4) ifadesinde türev alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \alpha k(z - z_1)^{k-1} + \sum_{j=1}^{l-1} (k+j)a_{k+j}(z - z_1)^{k+j-1} + (k+l)c_l(z - z_1)^{k+l-1} \\ &\quad + \sum_{j=l+1}^{\infty} (k+j)a_{k+j}(z - z_1)^{k+j-1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

elde edilir. $w(z) = v(z)^k$ olduğunu kabul edelim. Buradan

$$v(z) = \epsilon_k [w(z)]^{\frac{1}{k}} \quad , \quad \epsilon_k = \begin{cases} \pm 1 & ; k \text{ çift} \\ 1 & ; k \text{ tek} \end{cases} \quad (3.6)$$

yazılabilir. Şimdi $\frac{dw}{dz}$, yi

$$\frac{dw}{dz} = \sum_{j=0}^{\infty} b_{j+k-1} v(z)^{j+k-1} \quad (3.7)$$

olacak şekilde yazmak istiyoruz. Buradan;

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \sum_{j=0}^{\infty} b_{j+k-1} \left[\epsilon_k w(z)^{\frac{1}{k}} \right]^{j+k-1} = \sum_{j=0}^{\infty} b_{j+k-1} \epsilon_k^{j+k-1} w(z)^{\frac{j+k-1}{k}} \\ &= b_{k-1} \epsilon_k^{k-1} w(z)^{\frac{k-1}{k}} + b_k \epsilon_k^k w(z) + b_{k+1} \epsilon_k^{k+1} w(z)^{\frac{k+1}{k}} + \dots \\ &= b_{k-1} \epsilon_k^{k-1} \left\{ \alpha(z - z_1)^k + \sum_{j=1}^{l-1} a_{k+j}(z - z_1)^{k+j} + c_1(z - z_1)^{k+l} + \sum_{j=l+1}^{\infty} a_{k+j}(z - z_1)^{k+j} \right\}^{\frac{k-1}{k}} \\ &\quad + b_k \epsilon_k^k \left\{ \alpha(z - z_1)^k + \sum_{j=1}^{l-1} a_{k+j}(z - z_1)^{k+j} + c_1(z - z_1)^{k+l} + \sum_{j=l+1}^{\infty} a_{k+j}(z - z_1)^{k+j} \right\} \\ &\quad + b_{k+1} \epsilon_k^{k+1} \left\{ \alpha(z - z_1)^k + \sum_{j=1}^{l-1} a_{k+j}(z - z_1)^{k+j} + c_1(z - z_1)^{k+l} + \sum_{j=l+1}^{\infty} a_{k+j}(z - z_1)^{k+j} \right\}^{\frac{k+1}{k}} \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (3.8)$$

Yukarıdaki açılımda $O[(z - z_1)^{k+l+1}]$ terimleri ihmal edilirse

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= b_{k-1} \epsilon_k^{k-1} \left\{ \alpha(z - z_1)^k + \sum_{j=1}^{l-1} a_{k+j}(z - z_1)^{k+j} + c_1(z - z_1)^{k+l} \right\}^{\frac{k-1}{k}} \\ &\quad + b_k \epsilon_k^k \left\{ \alpha(z - z_1)^k + \sum_{j=1}^{l-1} a_{k+j}(z - z_1)^{k+j} + c_1(z - z_1)^{k+l} \right\} \\ &\quad + b_{k+1} \epsilon_k^{k+1} \left\{ \alpha(z - z_1)^k + \sum_{j=1}^{l-1} a_{k+j}(z - z_1)^{k+j} + c_1(z - z_1)^{k+l} \right\}^{\frac{k+1}{k}} + \dots \end{aligned} \quad (3.9)$$

elde edilir. $j = 0, 1, 2, \dots$ için z_1 noktası komşuluğunda

$$\left\{ \alpha(z - z_1)^k + \sum_{j=1}^{l-1} a_{k+j}(z - z_1)^{k+j} + c_1(z - z_1)^{k+l} \right\}^{\frac{k+j-1}{k}} \quad (3.10)$$

açılımını ,

$$\sum_{l=0} \hat{d}_{k+j+l-1}^{(j)} (z - z_1)^{k+j+l-1} \quad (3.11)$$

kuvvet serisi ile ifade edelim. Buna göre (3.9) düzenlenirse;

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= b_{k-1} \epsilon_k^{k-1} \sum_{l=0}^{l+1} d_{k+l-1}^{(0)} (z - z_1)^{k+l-1} + b_k \epsilon_k^k \sum_{l=0}^l d_{k+l}^{(1)} (z - z_1)^{k+l} + \dots + O[(z - z_1)^{k+l+1}] \\ &= b_{k-1} \epsilon_k^{k-1} \left\{ d_{k-1}^{(0)} (z - z_1)^{k-1} + d_k^{(0)} (z - z_1)^k + \dots + d_{k+l}^{(0)} (z - z_1)^{k+l} \right\} \\ &\quad + b_k \epsilon_k^k \left\{ d_k^{(1)} (z - z_1)^k + d_{k+1}^{(1)} (z - z_1)^{k+1} + \dots + d_{k+l}^{(1)} (z - z_1)^{k+l} \right\} + \dots + O[(z - z_1)^{k+l+1}] \\ &= a_k (z - z_1)^{k-1} + (k+1)a_{k+1}(z - z_1)^k + (k+2)a_{k+2}(z - z_1)^{k+1} + \dots \\ &\quad (k+l-1)a_{k+l-1}(z - z_1)^{k+l-2} + c_1(k+l)(z - z_1)^{k+l-1} + O[(z - z_1)^{k+l}] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Bu, $b_{k-1}, b_k, \dots, b_{k+l-1}$ katsayılarının elde edilmesini sağlar. Böylece

$$\frac{dw}{dz} = \sum_{j=0}^l b_{k+j-1} v(z)^{k+j-1} + O[(z - z_1)^{k+l}] \quad (3.13)$$

formunun bir açılımını elde etmiş olduk. Şimdi (3.3) ile verilen diferensiyel denkleme aşağıdaki dönüştürmeleri uygulayacak olursak;

$$\begin{cases} w(z) = v(z)^k \end{cases} \quad (3.14.a)$$

$$\begin{cases} \frac{dw}{dz} = b_{k-1} v(z)^{k-1} + b_k v(z)^k + \dots + u(z) v(z)^{k+l-1} \end{cases} \quad (3.14.b)$$

(3.14.a) dan ;

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial v} \frac{dv}{dz} = k v(z)^{k-1} \frac{dv}{dz}$$

ve buradan da;

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dz} &= \frac{1}{k} v(z)^{1-k} \frac{dw}{dz} = \frac{1}{k} v(z)^{1-k} \left\{ b_{k-1} v(z)^{k-1} + b_k v(z)^k + \dots + u(z) v(z)^{k+l-1} \right\} \\ &= \frac{1}{k} [b_{k-1} + b_k v(z) + \dots + u(z) v(z)] \end{aligned} \quad (3.15)$$

elde edilir. (3.14.b) denkleminden;

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{d}{dz} [b_{k-1}v(z)^{k-1}] + \frac{d}{dz} [b_k v(z)^k] + \dots + \frac{d}{dz} [u(z)v(z)^{k+l-1}] \quad (3.16)$$

yazılabilir. $b_{k+j-1} = b_{k+j-1}(z)$; $j = 0, 1, \dots, l-1$ olması mümkün olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{d^2w}{dz^2} &= \frac{db_{k-1}}{dz} v(z)^{k-1} + b_{k-1}(k-1)v(z)^{k-2} \frac{dv}{dz} + \frac{db_k}{dz} v(z)^k + b_k k v(z)^{k-1} \frac{dv}{dz} \\ &\quad + \dots + \frac{du}{dz} v(z)^{k+l-1} + u(z)(k+l-1)v(z)^{k+l-2} \frac{dv}{dz} \\ &= \frac{db_{k-1}}{dz} v(z)^{k-1} + \frac{k-1}{k} b_{k-1} v(z)^{k-2} [b_{k-1} + b_k v(z) + \dots + u(z)v(z)'] \\ &\quad + \frac{db_k}{dz} v(z)^k + b_k v(z)^{k-1} [b_{k-1} + b_k v(z) + \dots + u(z)v(z)'] + \dots \\ &\quad + \frac{du}{dz} v(z)^{k+l-1} + u(z) \frac{k+l-1}{k} v(z)^{k+l-2} [b_{k-1} + b_k v(z) + \dots + u(z)v(z)'] \end{aligned} \quad (3.17)$$

Bununla beraber $\frac{d^2w}{dz^2}$,

$$\frac{d^2w}{dz^2} = F\left(w, \frac{dw}{dz}, z\right) = F\left(v(z)^k, b_{k-1}v(z)^{k-1} + \dots + u(z)v(z)^{k+l-1}, z\right)$$

denklemini sağlamalıdır. Buna göre

$$\begin{aligned} \frac{du}{dz} &= v(z)^{l-k-l} \left\{ F\left(v(z)^k, b_{k-1}v(z)^{k-1} + \dots + u(z)v(z)^{k+l-1}, z\right) \right. \\ &\quad - \left[\frac{db_{k-1}}{dz} v(z)^{k-1} + \frac{k-1}{k} b_{k-1} v(z)^{k-2} [b_{k-1} + b_k v(z) + \dots + u(z)v(z)'] \right. \\ &\quad + \frac{db_k}{dz} v(z)^k + b_k v(z)^{k-1} [b_{k-1} + b_k v(z) + \dots + u(z)v(z)'] + \dots \\ &\quad \left. \left. + u(z) \frac{k+l-1}{k} v(z)^{k+l-2} [b_{k-1} + b_k v(z) + \dots + u(z)v(z)'] \right] \right\} \end{aligned}$$

Böylece verilen ikinci basamaktan diferensiyel denklem;

$$\frac{dv}{dz} = \frac{1}{k} [b_{k-1} + b_k v(z) + \dots + u(z)v(z)] \quad (3.18.a)$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dz} &= v(z)^{l-k-l} \left\{ F(v(z)^k, b_{k-1}v(z)^{k-1} + \dots + u(z)v(z)^{k+l-1}, z) \right. \\ &\quad - \left[b_{k-1} + b_k v(z) + \dots + u(z)v(z)^l \right] \left[\frac{k-1}{k} b_{k-1} v(z)^{k-2} + b_k v(z)^{k-1} \right. \\ &\quad \left. + \dots + u(z) \frac{k+l-1}{2} v(z)^{k+l-2} \right] - \left[\frac{db_{k-1}}{dz} v(z)^{k-1} + \frac{db_k}{dz} v(z)^k \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{db_{k+l-2}}{dz} v(z)^{k+l-2} \right] \left. \right\} \end{aligned} \quad (3.18.b)$$

şeklindeki birinci basamaktan diferensiyel denklem sistemine eşdeğerdir. Eğer sağ taraf $u(z_1) = u^0$, $v(z_1) = v^0$ başlangıç değerleri için analitik fonksiyonlar ise bu durumda Teorem 3.1 kullanılabilir. Sonuç olarak z_1 komşuluğunda $v = v(z)$ ve $u = u(z)$ analitik fonksiyonlarının, $u(z_1) = u^0$ ve $v(z_1) = v^0$ başlangıç koşularını ve ikinci basamaktan diferensiyel denklem sistemini sağlayan bir tek çözüm çifti vardır. Buradan, verilen ikinci basamaktan diferensiyel denklem z_1 noktası komşuluğunda bir analitik çözüme sahiptir ve böylece diferensiyel denklem Painlevé özelliğine sahiptir.

Örnek 3.1 1. Painlevé transendantını ele alalım:

$$\frac{d^2w}{dz^2} = 6w^2 + z \quad (3.19)$$

w nin sağladığı seri, z_1 ve c keyfi olmak üzere

$$w(z) = \frac{1}{(z-z_1)^2} - \frac{1}{10}z(z-z_1)^2 - \frac{1}{15}(z-z_1)^3 + c(z-z_1)^4 + \dots \quad (3.20)$$

şeklinde bulunur. Buradan

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{2}{(z-z_1)^3} - \frac{1}{5}z(z-z_1) - \frac{3}{10}(z-z_1)^2 + 4c(z-z_1)^3 + \dots \quad (3.20.b)$$

elde edilir.

Kabul edelim ki

$$w(z) = v(z)^{-2} \quad (3.21.a)$$

ve

$$\frac{dw}{dz} = \frac{b_{-3}}{v^3} + b_1 v + b_2 v^2 + b_3 v^3 + \dots \quad (3.21.b)$$

olsun. Buradan $\epsilon = \pm 1$ için

$$\frac{dw}{dz} = b_{-3} \epsilon w^{3/2} + b_1 \epsilon w^{-1/2} + b_2 w^{-1} + b_3 \epsilon w^{-3/2} + \dots \quad (3.21.c)$$

$O[(z - z_1)^i]$ terimleri ihmali edilecek olursa bu durumda,

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= b_{-3} \epsilon \left\{ \frac{1}{(z - z_1)^2} - \frac{1}{10} z(z - z_1)^2 - \frac{1}{15} (z - z_1)^3 + c(z - z_1)^4 \right\}^{3/2} \\ &\quad + b_1 \epsilon \left\{ \frac{1}{(z - z_1)^2} - \frac{1}{10} z(z - z_1)^2 - \frac{1}{15} (z - z_1)^3 + c(z - z_1)^4 \right\}^{-1/2} \\ &\quad + b_2 \left\{ \frac{1}{(z - z_1)^2} - \frac{1}{10} z(z - z_1)^2 - \frac{1}{15} (z - z_1)^3 + c(z - z_1)^4 \right\}^{-1} \\ &\quad + b_3 \epsilon \left\{ \frac{1}{(z - z_1)^2} - \frac{1}{10} z(z - z_1)^2 - \frac{1}{15} (z - z_1)^3 + c(z - z_1)^4 \right\}^{-3/2} \\ Y &= 1 + \left[-\frac{1}{10} z(z - z_1)^4 - \frac{1}{15} (z - z_1)^5 + c(z - z_1)^6 \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

diyecek olursak

$$\frac{dw}{dz} = \frac{b_{-3} \epsilon}{(z - z_1)^3} Y^{3/2} + b_1 \epsilon (z - z_1) Y^{-1/2} + b_2 (z - z_1)^2 Y^{-1} + b_3 (z - z_1)^3 Y^{-3/2} \quad (3.23)$$

elde edilir. Şimdi

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$$

açılımını kullanalım. Buna göre;

$$\begin{aligned}
 \frac{dw}{dz} &= \frac{b_{-3}\epsilon}{(z-z_1)^3} \left\{ 1 + \frac{3}{2} \left[-\frac{1}{10}z(z-z_1)^4 - \frac{1}{15}(z-z_1)^5 + c(z-z_1)^6 \right] \right\} \\
 &\quad + b_1\epsilon(z-z_1) + b_2(z-z_1)^2 + b_3\epsilon(z-z_1)^3 \\
 &= \frac{b_{-3}\epsilon}{(z-z_1)^3} + \left(b_1\epsilon - \frac{3b_{-3}\epsilon z}{20} \right)(z-z_1) + \left(b_2 - \frac{3b_{-3}\epsilon}{30} \right)(z-z_1)^2 + \left(b_3\epsilon + \frac{3b_{-3}\epsilon c}{2} \right)(z-z_1)^3 \\
 &= \frac{-2}{(z-z_1)^3} - \frac{1}{5}z(z-z_1) - \frac{3}{10}(z-z_1)^2 + 4c(z-z_1)^3. \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

Burada;

$$\begin{aligned}
 b_{-3}\epsilon &= -2 \quad \Rightarrow \quad b_{-3} = -2\epsilon \\
 b_1\epsilon - \frac{3b_{-3}\epsilon z}{20} &= -\frac{1}{5}z \quad \Rightarrow \quad b_1 = -\frac{1}{2}\epsilon z \\
 b_2 - \frac{3b_{-3}\epsilon}{30} &= -\frac{3}{10} \quad \Rightarrow \quad b_2 = -\frac{1}{2} \\
 b_3\epsilon + \frac{3b_{-3}\epsilon c}{2} &= 4c \quad \Rightarrow \quad b_3 = 7\epsilon c
 \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{2}{v^3}\epsilon - \frac{z}{2}\nu\epsilon - \frac{1}{2}\nu^2 + 7\epsilon cv^3 + \dots \tag{3.25}$$

Şimdi aşağıdaki iki dönüşüm formülünü kullanabiliriz:

$$w(z) = v(z)^{-2} \tag{3.26.a}$$

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{2}{v(z)^3}\epsilon - \frac{z}{2}\epsilon v(z) - \frac{1}{2}v(z)^2 + \epsilon u(z)v(z)^3 \tag{3.26.b}$$

(3.26.a) dan

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial v} \frac{dv}{dz} = -\frac{2}{v^3} \frac{dv}{dz}$$

ve buradan da

$$\frac{dv}{dz} = -\frac{v^3}{2} \frac{dw}{dz}$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dz} &= -\frac{v^3}{2} \left[-\frac{2}{v^3} \epsilon - \frac{z}{2} v \epsilon - \frac{1}{2} v^2 + \epsilon u v^3 \right] \\ &= \epsilon + \frac{1}{4} \epsilon z v^4 + \frac{1}{4} v^5 - \frac{1}{2} \epsilon u v^6\end{aligned}\quad (3.27)$$

(3.26.b) denkleminden;

$$\begin{aligned}\frac{d^2 w}{dz^2} &= 6\epsilon v^{-4} \frac{dv}{dz} - \frac{v}{2} \epsilon - \frac{1}{2} \epsilon z \frac{dv}{dz} - v \frac{dv}{dz} + \epsilon \frac{du}{dz} v^3 + 3uv^2 \epsilon \frac{dv}{dz} \\ &= 6\epsilon v^{-4} \left[\epsilon + \frac{1}{4} z v^4 \epsilon + \frac{1}{4} v^5 - \frac{1}{2} \epsilon u v^6 \right] - \frac{v}{2} \epsilon \\ &\quad - \frac{1}{2} \epsilon z \left[\epsilon + \frac{1}{4} z v^4 \epsilon + \frac{1}{4} v^5 - \frac{1}{2} \epsilon u v^6 \right] - v \left[\epsilon + \frac{1}{4} z v^4 \epsilon + \frac{1}{4} v^5 - \frac{1}{2} \epsilon u v^6 \right] \\ &\quad + \epsilon \frac{du}{dz} v^3 + 3uv^2 \epsilon \left[\epsilon + \frac{1}{4} z v^4 \epsilon + \frac{1}{4} v^5 - \frac{1}{2} \epsilon u v^6 \right]\end{aligned}\quad (3.28)$$

olup $\frac{d^2 w}{dz^2}$ ifadesi,

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = 6w^2 + z = 6v^{-4} + z \quad (3.29)$$

denklemi sağlamalıdır. Buna göre

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{8} \epsilon z^2 v + \frac{3}{8} z v^2 - \epsilon z u v^3 + \frac{1}{4} \epsilon v^3 - \frac{5}{4} u v^4 + \frac{3}{2} \epsilon u^2 v^5$$

elde edilir. Böylece (3.19) denklemi

$$\frac{dv}{dz} = \epsilon + \frac{1}{4} \epsilon z v^4 + \frac{1}{4} v^5 - \frac{1}{2} \epsilon u v^6 \quad (3.30.a)$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{8} \epsilon z^2 v + \frac{3}{8} z v^2 - \epsilon z u v^3 + \frac{1}{4} \epsilon v^3 - \frac{5}{4} u v^4 + \frac{3}{2} \epsilon u^2 v^5 \quad (3.30.b)$$

diferensiyel denklem sistemine eşdeğerdir. Teorem 3.1 den bu sistem, z_1 komşuluğunda analitik ve $u(z_1) = u_0$, $v(z_1) = v_0$ başlangıç koşullarını sağlayan bir tek çözümü sahiptir. Böylece (3.19) denklemi Painlevé özelliğine sahiptir.

Şimdi 3. basamaktan bir diferensiyel denklem için yeterlilik koşullarını inceleyelim.

$$w''' = F(w, w', w'', z) \quad (3.31)$$

olsun. Burada F , z ye göre analitik, w, w', w'' e göre rasyoneldir. Bir keyfi z_1 noktası komşuluğunda bir serisel çözümü

$$\begin{aligned} w(z) = & \alpha(z - z_1)^k + \sum_{j=1}^{l_1-1} a_{k+j}(z - z_1)^{k+j} + c_1(z - z_1)^{k+l_1} + \sum_{j=l_1+1}^{l_2-1} a_{k+j}(z - z_1)^{k+j} \\ & + c_2(z - z_1)^{k+l_2} + \sum_{j=l_2+1}^{\infty} a_{k+j}(z - z_1)^{k+j} \end{aligned} \quad (3.32)$$

şeklinde bulduğumuzu kabul edelim. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitler ve $k < 0$ dir. Böylece $z = z_1$ k-inci basamaktan bir kutuptur. Buna göre;

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} = & \alpha k(z - z_1)^{k-1} + \sum_{j=1}^{l_1-1} (k+j)a_{k+j}(z - z_1)^{k+j-1} + (k+l_1)c_1(z - z_1)^{k+l_1-1} \\ & + \sum_{j=l_1+1}^{l_2-1} (k+j)a_{k+j}(z - z_1)^{k+j-1} + (k+l_2)c_2(z - z_1)^{k+l_2-1} \\ & + \sum_{j=l_2+1}^{\infty} (k+j)a_{k+j}(z - z_1)^{k+j-1} \end{aligned} \quad (3.33)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{d^2w}{dz^2} = & \alpha k(k-1)(z - z_1)^{k-2} + \sum_{j=1}^{l_1-1} (k+j)(k+j-1)a_{k+j}(z - z_1)^{k+j-2} \\ & + (k+l_1)(k+l_1-1)c_1(z - z_1)^{k+l_1-2} + \sum_{j=l_1+1}^{l_2-1} (k+j)(k+j-1)a_{k+j}(z - z_1)^{k+j-2} \\ & + (k+l_2)(k+l_2-1)c_2(z - z_1)^{k+l_2-2} + \sum_{j=l_2+1}^{\infty} (k+j)(k+j-1)a_{k+j}(z - z_1)^{k+j-2} \end{aligned} \quad (3.34)$$

$w(z) = v(z)^k$ olduğunu kabul edelim. Buradan;

$$v(z) = \varepsilon_k [w(z)]^{1/k} \quad , \quad \varepsilon_k = \begin{cases} \pm 1 & ; k \text{ çift} \\ 1 & ; k \text{ tek} \end{cases}$$

yazılabilir. Şimdi;

$$\frac{dw}{dz} = \sum_{j=0}^{\infty} b_{j+k-1} v(z)^{j+k-1} \quad (3.35)$$

ve

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \sum_{j=0}^{\infty} e_{j+k-2} v(z)^{j+k-2} \quad (3.36)$$

oluşturabiliriz. $v(z) = \varepsilon_k [w(z)]^{1/k}$ yi yerine yazarsak

$$\frac{dw}{dz} = \sum_{j=0}^{\infty} b_{j+k-1} \varepsilon_k^{j+k-1} w(z)^{(j+k-1) \cdot k}$$

yani

$$\frac{dw}{dz} = b_{k-1} \varepsilon_k^{k-1} w(z)^{(k-1) \cdot k} + b_k \varepsilon_k^k w(z) + b_{k+1} \varepsilon_k^{k+1} w(z)^{(k+1) \cdot k} + \dots \quad (3.37)$$

yazılabilir. z_1 noktası komşuluğunda $w(z)^{(k+j-1) \cdot k}$ ($j=0, 1, \dots$) nin olası açılımı

$$\sum_{i=0} d_{k+i+j-1}^{(j)} (z - z_1)^{k+i+j-1}$$

şeklinde bir kuvvet serisidir. Burada $O[(z - z_1)^{k+l_2+1}]$ terimleri ihmali edilmektedir.

Buradan ;

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= b_{k-1} \varepsilon_k^{k-1} \sum_{i=0}^{l_1+1} d_{k+i-1}^{(0)} (z - z_1)^{k+i-1} + b_k \varepsilon_k^k \sum_{i=0}^{l_2} d_{k+i}^{(1)} (z - z_1)^{k+i} + \dots + O[(z - z_1)^{k+l_2+1}] \\ &= \alpha k (z - z_1)^{k-1} + \sum_{j=1}^{l_1} (k+j) a_{k+j} (z - z_1)^{k+j} + (k+l_1) c_1 (z - z_1)^{k+l_1-1} \\ &\quad + \sum_{j=l_1+1}^{l_2-1} (k+j) a_{k+j} (z - z_1)^{k+j-1} + (k+l_2) c_2 (z - z_1)^{k+l_2-1} + O[(z - z_1)^{k+l_2}] \end{aligned} \quad (3.38)$$

Bu, $b_{k-1}, b_k, \dots, b_{k+l_2-1}$ katsayılarını çözmemizi sağlar. Böylece

$$\frac{dw}{dz} = \sum_{j=0}^{l_2} b_{k+j-1} v(z)^{k+j-1} + O[(z - z_1)^{k+l_1}] \quad (3.39)$$

şeklinde bir açılım elde edilmiş oldu. (3.36) denkleminden

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \sum_{j=0}^{\infty} e_{j+k-2} \varepsilon_k^{k+j-2} w(z)^{(j+k-2), k}$$

yani

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = e_{k-2} \varepsilon_k^{k-2} w(z)^{(k-2), k} + e_{k-1} \varepsilon_k^{k-1} w(z)^{(k-1), k} + e_k \varepsilon_k^k w(z) + \dots \quad (3.40)$$

z_1 noktası komşuluğunda $j=0, 1, 2, \dots$ için $w(z)^{(k+j-2), k}$ nın olası açılımı

$$\sum_{i=0}^j g_{k+i+j-2}^{(j)} (z - z_1)^{k+i+j-2}$$

şeklinde bir kuvvet serisidir. Burada $O[(z - z_1)^{k+l_2+1}]$ terimleri ihmäl edilmektedir.
Buradan

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dz^2} &= e_{k-2} \varepsilon_k^{k-2} \sum_{i=0}^{l_2+2} g_{k+i-2}^{(0)} (z - z_1)^{k+i-2} + e_{k-1} \varepsilon_k^{k-1} \sum_{i=0}^{l_2+1} g_{k+i-1}^{(1)} (z - z_1)^{k+i-1} + \dots + O[(z - z_1)^{k+l_2-1}] \\ &= \alpha k(k-1)(z - z_1)^{k-2} + \sum_{j=1}^{l_2-1} (k+j)(k+j-1) a_{k+j} (z - z_1)^{k+j-2} \\ &\quad + (k+l_1)(k+l_1-1) c_1 (z - z_1)^{k+l_1-2} + \sum_{j=l_1+1}^{l_2-1} (k+j)(k+j-1) a_{k+j} (z - z_1)^{k+j-2} \\ &\quad + (k+l_2)(k+l_2-1) c_2 (z - z_1)^{k+l_2-2} + O[(z - z_1)^{k+l_2-1}] \end{aligned} \quad (3.41)$$

Şimdi $e_{k-2}, e_{k-1}, \dots, e_{k+l_2-2}$ katsayıları bulunabilir. Böylece

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \sum_{j=0}^{l_2} e_{j+k-2} v(z)^{j+k-2} + O[(z - z_1)^{k+l_1-1}] \quad (3.42)$$

şeklinde bir açılım elde edilmiş oldu. (3.31) şeklinde verilen diferensiyel denkleme aşağıdaki üç dönüşüm formülünü uygulayalım;

$$\left\{ \begin{array}{l} w(z) = v(z)^k \\ \frac{dw}{dz} = b_{k-1}v(z)^{k-1} + b_k v(z)^k + \dots + v_1(z)v(z)^{k+l_2-1} \end{array} \right. \quad (3.43.a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dw}{dz} = b_{k-1}v(z)^{k-1} + b_k v(z)^k + \dots + v_1(z)v(z)^{k+l_2-1} \end{array} \right. \quad (3.43.b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2w}{dz^2} = e_{k-2}v(z)^{k-2} + e_{k-1}v(z)^{k-1} + \dots + v_2(z)v(z)^{k+l_2-2} \end{array} \right. \quad (3.43.c)$$

(3.43.a) dan

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial v} \frac{dv}{dz} = kv(z)^{k-1} \frac{dv}{dz}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dz} &= \frac{1}{k} v(z)^{1-k} \frac{dw}{dz} \\ &= \frac{1}{k} v(z)^{1-k} [b_{k-1}v(z)^{k-1} + b_k v(z)^k + \dots + v_1(z)v(z)^{k+l_2-1}] \\ &= \frac{1}{k} [b_{k-1} + b_k v(z) + b_{k+1}v(z)^2 + \dots + v_1(z)v(z)^{l_2}] \end{aligned} \quad (3.44)$$

dir. (3.43.b) den

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{d}{dz} [b_{k-1}v(z)^{k-1} + b_k v(z)^k + \dots + v_1(z)v(z)^{k+l_2-1}] \quad (3.45)$$

$b_{k+j-1} = b_{k+j-1}(z)$ ($j=0,1,2,\dots$) olması mümkün olduğundan:

$$\begin{aligned} \frac{d^2w}{dz^2} &= \frac{db_{k-1}}{dz} v(z)^{k-1} + b_{k-1} \frac{k-1}{k} v(z)^{k-2} [b_{k-1} + b_k v(z) + b_{k+1}v(z)^2 + \dots + v_1(z)v(z)^{l_2}] \\ &\quad + \frac{db_k}{dz} v(z)^k + b_k v(z)^{k-1} [b_{k-1} + b_k v(z) + b_{k+1}v(z)^2 + \dots + v_1(z)v(z)^{l_2}] \\ &\quad + \frac{dv_1}{dz} v(z)^{k+l_2-1} + v_1(z) \frac{k+l_2-1}{k} v(z)^{k+l_2-2} [b_{k-1} + b_k v(z) + b_{k+1}v(z)^2 + \dots + v_1(z)v(z)^{l_2}] \\ &= e_{k-2}v(z)^{k-2} + e_{k-1}v(z)^{k-1} + \dots + v_2(z)v(z)^{k+l_2-2} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{dv_1}{dz} = & v(z)^{l-k-l_2} \left\{ e_{k-2} v(z)^{k-2} + e_{k-1} v(z)^{k-1} + \dots + v_2(z) v(z)^{k+l_2-2} \right. \\
& - \left[\frac{db_{k-1}}{dz} v(z)^{k-1} + b_{k-1} \frac{k-1}{k} v(z)^{k-2} [b_{k-1} + b_k v(z) + \dots + v_1(z) v(z)^{l_2}] \right] \\
& + \frac{db_k}{dz} v(z)^k + b_k v(z)^{k-1} [b_{k-1} + b_k v(z) + \dots + v_1(z) v(z)^{l_2}] \\
& \left. + \dots + v_1(z) \frac{k+l_2-1}{k} v(z)^{k+l_2-2} [b_{k-1} + b_k v(z) + \dots + v_1(z) v(z)^{l_2}] \right\}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

dir. (3.43.c) den

$$\frac{d^3 w}{dz^3} = \frac{d}{dz} \left[e_{k-2} v(z)^{k-2} + e_{k-1} v(z)^{k-1} + \dots + v_2(z) v(z)^{k+l_2-2} \right] \tag{3.48}$$

yazılabilir. $j = 0, 1, \dots, l_2 - 1$ için $e_{k+j-2} = e_{k+j-2}(z)$ olabileceğinden

$$\begin{aligned}
\frac{d^3 w}{dz^3} = & \frac{de_{k-2}}{dz} v(z)^{k-2} + e_{k-2} (k-2) v(z)^{k-3} \frac{dv}{dz} \\
& + \frac{de_{k-1}}{dz} v(z)^{k-1} + e_{k-1} (k-1) v(z)^{k-2} \frac{dv}{dz} \\
& + \dots + \frac{dv_2}{dz} v(z)^{k+l_2-2} + v_2(z) (k+l_2-2) v(z)^{k+l_2-3} \frac{dv}{dz}
\end{aligned} \tag{3.49}$$

(3.44) denkleminden,

$$\begin{aligned}
\frac{d^3 w}{dz^3} = & \frac{1}{k} \left[e_{k-2} (k-2) v(z)^{k-3} + e_{k-1} (k-1) v(z)^{k-2} + \dots \right. \\
& \left. + v_2(z) (k+l_2-2) v(z)^{k+l_2-3} [b_{k-1} + b_k v(z) + \dots + v_1(z) v(z)^{l_2}] \right] \\
& + \frac{de_{k-2}}{dz} v(z)^{k-2} + \frac{de_{k-1}}{dz} v(z)^{k-1} + \dots + \frac{dv_2}{dz} v(z)^{k+l_2-2}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

elde edilir. W nin 3. basamaktan türevi,

$$\begin{aligned}
\frac{d^3 w}{dz^3} = & F(v(z)^k, b_{k-1} v(z)^{k-1} + b_k v(z)^k + \dots + v_1(z) v(z)^{k+l_2-1}, \\
& e_{k-2} v(z)^{k-2} + e_{k-1} v(z)^{k-1} + \dots + v_2(z) v(z)^{k+l_2-2}, z)
\end{aligned}$$

diferensiyel denklemini sağlar. Buradan,

$$\begin{aligned} \frac{dv_2}{dz} = v(z)^{2-k-l_2} & \left\{ - \left[\left(\frac{de_{k-2}}{dz} v(z)^{k-2} + \frac{de_{k-1}}{dz} v(z)^{k-1} + \dots + \frac{de_{k+l_2-3}}{dz} v(z)^{k+l_2-3} \right) \right. \right. \\ & + \frac{1}{k} \left[e_{k-2}(k-2)v(z)^{k-3} + e_{k-1}(k-1)v(z)^{k-2} + \dots + v_2(z)(k+l_2-2)v(z)^{k+l_2-3} \right] \\ & \cdot [b_{k-1} + b_k v(z) + \dots + v_1(z)v(z)^{l_2}] \Big) \\ & + F(v(z)^k, b_{k-1}v(z)^{k-1} + b_k v(z)^k + \dots + v_1(z)v(z)^{k+l_2-1}, \\ & \left. \left. e_{k-2}v(z)^{k-2} + e_{k-1}v(z)^{k-1} + \dots + v_2(z)v(z)^{k+l_2-2}, z \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Böylece verilen diferensiyel denkleme eşdeğer olacak üç boyutlu bir diferensiyel denklem sistemine varılır:

$$\frac{dv}{dz} = \frac{1}{k} [b_{k-1} + b_k v(z) + b_{k+l_2} v(z)^2 + \dots + v_1(z)v(z)^{l_2}] \quad (3.52.a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dz} = v(z)^{l_2-k} & \left\{ e_{k-2}v(z)^{k-2} + e_{k-1}v(z)^{k-1} + \dots + v_2(z)v(z)^{k+l_2-2} \right. \\ & - \left[\frac{db_{k-1}}{dz} v(z)^{k-1} + \frac{db_k}{dz} v(z)^k + \dots + \frac{db_{k+l_2-2}}{dz} v(z)^{k+l_2-2} \right] \\ & - [b_{k-1} + b_k v(z) + b_{k+l_2} v(z)^2 + \dots + v_1(z)v(z)^{l_2}] \\ & \left. \cdot \left[b_{k-1} \frac{k-1}{k} v(z)^{k-2} + b_k v(z)^{k-1} + \dots + v_1(z) \frac{k+l_2-1}{k} v(z)^{k+l_2-2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.52.b)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_2}{dz} = v(z)^{2-k-l_2} & \left\{ - \left[\left(\frac{de_{k-2}}{dz} v(z)^{k-2} + \frac{de_{k-1}}{dz} v(z)^{k-1} + \dots + \frac{de_{k+l_2-3}}{dz} v(z)^{k+l_2-3} \right) \right. \right. \\ & + \frac{1}{k} \left[e_{k-2}(k-2)v(z)^{k-3} + e_{k-1}(k-1)v(z)^{k-2} + \dots + v_2(z)(k+l_2-2)v(z)^{k+l_2-3} \right] \\ & \cdot [b_{k-1} + b_k v(z) + \dots + v_1(z)v(z)^{l_2}] \Big) \\ & + F(v(z)^k, b_{k-1}v(z)^{k-1} + b_k v(z)^k + \dots + v_1(z)v(z)^{k+l_2-1}, \\ & \left. \left. e_{k-2}v(z)^{k-2} + e_{k-1}v(z)^{k-1} + \dots + v_2(z)v(z)^{k+l_2-2}, z \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.52.c)$$

Eğer sağ taraf, $v(z_1) = v^0, v_1(z_1) = v_1^0, v_2(z_1) = v_2^0$ başlangıç değerleri için analitik fonksiyonlar ise bu durumda Teorem 3.1 kullanılır. Başka bir deyişle biliyoruz ki z_1 noktası komşuluğunda 3. basamaktan diferensiye denklem sistemini ve $v(z_1) = v^0, v_1(z_1) = v_1^0, v_2(z_1) = v_2^0$ koşullarını sağlayan bir ve yalnız bir $v = v(z), v_1 = v_1(z), v_2 = v_2(z)$ analitik fonksiyon sistemi vardır. Buradan verilen 3. basamaktan diferensiye denklem z_1 noktası komşuluğunda bir analitik çözüme sahiptir ve böylece diferensiye denklem Painlevé özelliğine sahiptir.

Örnek 3.2 $\frac{d^3w}{dz^3} = 6w^2 \frac{dw}{dz} + w + z \frac{dw}{dz}$ (3.53)

denklemi ele alalım. w nin sağladığı seri

$$w(z) = \frac{1}{(z - z_1)} - \frac{z_1}{6}(z - z_1) + c_1(z - z_1)^2 + c_2(z - z_1)^3 + \dots \quad (3.54.a)$$

$$= \frac{1}{(z - z_1)} - \frac{z}{6}(z - z_1) + \left(c_1 + \frac{1}{6}\right)(z - z_1)^2 + c_2(z - z_1)^3 + \dots \quad (3.54.b)$$

şeklindedir. Buradan,

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{(z - z_1)^2} - \frac{z}{6} + \left(2c_1 + \frac{1}{6}\right)(z - z_1) + 3c_2(z - z_1)^2 + \dots \quad (3.54.c)$$

ve

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{2}{(z - z_1)^3} + 2c_1 + 6c_2(z - z_1) + \dots \quad (3.54.d)$$

Kabul edelim ki,

$$w(z) = \frac{1}{v(z)}$$

ve

$$\frac{dw}{dz} = \frac{b_{-2}}{v^2} + b_0 + b_1 v + b_2 v^2 + b_3 v^3 + \dots$$

olsun.

Buradan $v(z) = \frac{1}{w(z)}$ yerine yazılırsa

$$\frac{dw}{dz} = b_{-2}w^2 + b_0 + b_1w^{-1} + b_2w^{-2} + b_3w^{-3} + \dots \quad (3.55)$$

$O[(z - z_1)^4]$ terimleri ihmal edilecek olursa,

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= b_{-2} \left[\frac{1}{(z - z_1)} - \frac{z}{6}(z - z_1) + \left(c_1 + \frac{1}{6} \right)(z - z_1)^2 + c_2(z - z_1)^3 \right]^2 \\ &\quad + b_0 + b_1 \left[\frac{1}{(z - z_1)} - \frac{z}{6}(z - z_1) + \left(c_1 + \frac{1}{6} \right)(z - z_1)^2 + c_2(z - z_1)^3 \right]^{-1} \\ &\quad + b_2 \left[\frac{1}{(z - z_1)} - \frac{z}{6}(z - z_1) + \left(c_1 + \frac{1}{6} \right)(z - z_1)^2 + c_2(z - z_1)^3 \right]^{-2} \\ &\quad + b_3 \left[\frac{1}{(z - z_1)} - \frac{z}{6}(z - z_1) + \left(c_1 + \frac{1}{6} \right)(z - z_1)^2 + c_2(z - z_1)^3 \right]^{-3} \\ &= \frac{b_{-2}}{(z - z_1)^2} Y^2 + b_0 + b_1 + b_1(z - z_1)Y^{-1} + b_2(z - z_1)Y^{-2} + b_3(z - z_1)^3 Y^{-3} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Burada,

$$Y = 1 + \left[-\frac{z}{6}(z - z_1)^2 + \left(c_1 + \frac{1}{6} \right)(z - z_1)^3 + c_2(z - z_1)^4 \right] \quad (3.57)$$

şeklindedir. Şimdi,

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$$

açılımını kullanalım. Buna göre

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dz} &= \frac{b_{-2}}{(z-z_1)^2} \left\{ 1 + 2 \left[-\frac{z}{6}(z-z_1)^2 + \left(c_1 + \frac{1}{6} \right) (z-z_1)^3 + c_2 (z-z_1)^4 \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[-\frac{z}{6}(z-z_1)^2 + \left(c_1 + \frac{1}{6} \right) (z-z_1)^3 + c_2 (z-z_1)^4 \right]^2 \right\} + b_0 \\
&\quad + b_1 (z-z_1) \left\{ 1 - \left[-\frac{z}{6}(z-z_1)^2 + \left(c_1 + \frac{1}{6} \right) (z-z_1)^3 + c_2 (z-z_1)^4 \right] \right\} \\
&\quad + b_2 (z-z_1)^2 \left\{ 1 - 2 \left[-\frac{z}{6}(z-z_1)^2 + \left(c_1 + \frac{1}{6} \right) (z-z_1)^3 + c_2 (z-z_1)^4 \right] \right\} \\
&\quad + b_3 (z-z_1)^3 + \dots
\end{aligned}$$

(3.58)

(3.54.c) denkleminden

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{(z-z_1)^2} - \frac{z}{6} + \frac{1}{6}(z-z_1) + 2c_1(z-z_1) + 3c_2(z-z_1)^2 + O[(z-z_1)^3]$$

(3.59)

Burada;

$$b_{-2} = -1 \quad , \quad b_0 = -\frac{z}{2} \quad , \quad b_1 = \frac{1}{2} + 4c_1 \quad , \quad b_2 = 5c_2 + \frac{z^2}{36}$$

şeklinde elde edilir. Böylece,

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{v^2} - \frac{z}{2} + \left(\frac{1}{2} + 4c_1 \right) v + \left(5c_2 + \frac{z^2}{36} \right) v^2 + \dots$$

(3.60)

Şimdi,

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{e_{-3}}{v^3} + \frac{e_{-2}}{v^2} + \frac{e_{-1}}{v} + e_0 + e_1 v + \dots$$

(3.61)

olduğunu kabul edelim. Burada da katsayılar,

$$e_{-3} = 2 \quad , \quad e_{-2} = 0 \quad , \quad e_{-1} = z \quad , \quad e_0 = -4c_1 - 1$$

şeklinde elde edilir. Böylece,

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{2}{v^3} + \frac{z}{v} - (4c_1 + 1) + \dots \quad (3.62)$$

yazılabilir. Şimdi aşağıdaki dönüşüm formülleri kullanılabilir;

$$\left\{ \begin{array}{l} w(z) = \frac{1}{v(z)} \\ \frac{dw}{dz} = -\frac{1}{v^2} - \frac{z}{2} + v_1 v \end{array} \right. \quad (3.63.a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{2}{v^3} + \frac{z}{v} + v_2 \end{array} \right. \quad (3.63.b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{2}{v^3} + \frac{z}{v} + v_2 \end{array} \right. \quad (3.64.c)$$

(3.63.a) dan

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dz}$$

ve buradan da

$$\frac{dv}{dz} = -v^2 \frac{dw}{dz}$$

ve

$$\frac{dv}{dz} = -v^2 \left[-\frac{1}{v^2} - \frac{z}{2} + v_1 v \right]$$

$$= 1 + \frac{1}{2} zv^2 - v_1 v^3 \quad (3.64)$$

elde edilir. (3.63.b) denkleminden

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \frac{dw}{dz} &= \frac{2}{v^3} \frac{dv}{dz} - \frac{1}{2} + v_1 \frac{dv}{dz} + \frac{dv_1}{dz} v \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{dv_1}{dz} + \left[\frac{2}{v^3} + v_1 \right] \left[1 + \frac{1}{2} z v^2 - v_1 v^3 \right] \\
&= \frac{2}{v^3} + \frac{z}{v} + v_2
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{dv_1}{dz} = \frac{1}{v} \left[v_2 + \frac{1}{2} + v_1 - \frac{1}{2} z v^2 v_1 + v_1^2 v^3 \right] \quad (3.65)$$

(3.63.c) denkleminden

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \frac{d^2 w}{dz^2} &= -\frac{6}{v^4} \frac{dv}{dz} + \frac{1}{v} - \frac{z}{v^2} \frac{dv}{dz} + \frac{dv_2}{dz} \\
&= \left(-\frac{6}{v} + 1 \right) \left(1 + \frac{1}{2} z v^2 - v_1 v^3 \right) + \frac{1}{v} + \frac{dv_2}{dz} \\
&= \frac{6}{v^2} \left[-\frac{1}{v^2} - \frac{z}{2} + v_1 v \right] + \frac{1}{v} + z \left[-\frac{1}{v^2} - \frac{z}{2} + v_1 v \right]
\end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$\frac{dv_2}{dz} = 0 \quad (3.66)$$

dir. Böylece (3.53) diferensiyel denklemi aşağıdaki sisteme eşdeğerdir;

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dz} = 1 + \frac{z}{2} v^2 - v_1 v^3 \\ \frac{dv_1}{dz} = \frac{1}{v} \left[v_2 + v_1 + \frac{1}{2} - \frac{z}{2} v^2 v_1 + v_1^2 v^3 \right] \end{array} \right. \quad (3.67.a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dz} = 1 + \frac{z}{2} v^2 - v_1 v^3 \\ \frac{dv_1}{dz} = \frac{1}{v} \left[v_2 + v_1 + \frac{1}{2} - \frac{z}{2} v^2 v_1 + v_1^2 v^3 \right] \\ \frac{dv_2}{dz} = 0 \end{array} \right. \quad (3.67.b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dz} = 1 + \frac{z}{2} v^2 - v_1 v^3 \\ \frac{dv_1}{dz} = \frac{1}{v} \left[v_2 + v_1 + \frac{1}{2} - \frac{z}{2} v^2 v_1 + v_1^2 v^3 \right] \\ \frac{dv_2}{dz} = 0 \end{array} \right. \quad (3.67.c)$$

Buradan;

$$v_1 = \frac{1}{2} + 4c_1 + O(v^2)$$

ve

$$v_2 = -4c_1 - 1 + O(v)$$

Böylece

$$v_1 + v_2 + \frac{1}{2} = O(v)$$

Teorem 3.1 den bu sistem z_1 noktası komşuluğunda

$$v_1(z_1) = v_1^0, \quad v_2(z_1) = v_2^0, \quad v(z_1) = 0$$

başlangıç koşullarını sağlayan bir tek analitik çözüme sahiptir. Böylece diferansiyel denklem Painlevé özelliğine sahiptir.

4. PAINLEVÉ DENKLEMLERİ

4.1. Painlevé Denklemleri İçin Genel Bilgiler

Sabit kritik noktalı 50 denklem içerisinde son derece ayıralıklı olmalarından dolayı *Painlevé Denklemleri* olarak adlandırılan ve sırasıyla PI-PVI olarak adlandırılan bu altı denklem aşağıda verilmektedir;

$$PI. \quad \frac{d^2w}{dz^2} = 6w^2 + z$$

$$PII. \quad \frac{d^2w}{dz^2} = 2w^3 + zw + \alpha$$

$$PIII. \quad \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{w} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 - \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} + \frac{1}{z} (\alpha w^2 + \beta) + \gamma w^3 + \frac{\delta}{w}$$

$$PIV. \quad \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{2w} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 + \frac{3}{2} w^3 + 4zw^2 + 2(z^2 - \alpha)w + \frac{\beta}{w}$$

$$PV. \quad \frac{d^2w}{dz^2} = \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1} \right) \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 - \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} + \frac{(w-1)^2}{z^2} \left(\alpha w + \frac{\beta}{w} \right) + \frac{\gamma w}{z} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1}$$

$$PVI. \quad \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-z} \right) \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{w-z} \right) \frac{dw}{dz} + \frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2} \left[\alpha + \frac{\beta z}{w^2} + \frac{\gamma(z-1)}{(w-1)^2} + \frac{\delta z(z-1)}{(w-z)^2} \right]$$

Painlevé denklemlerinde bulunan α, β, γ ve δ parametrelerdir. Bu denklemlerden PI, PII, PIII 1893'te başlayan çalışmalarıyla *Painlevé* tarafından verilmiş; PIV, PV, PVI da 1903'ten 1910'a kadar yaptığı çalışmalarla öğrencisi *Gambier* tarafından bulunmuştur. PVI aynı zamanda hünerli yaklaşım ve farklı incelemelerle *R. Fuchs* tarafından yeniden ortaya konmuştur.

Bu altı denklem *indirgenemez* türden denklemelerdir. Burada *indirgenemez* türden demekle, bu denklemelerin daha basit bir denklem ile ya da daha basit denklemlerin birleşimi olarak değiştirilemeyeceği kastedilmektedir.

PI denklemi bazen

$$\frac{d^2w}{dz^2} = 6w^2 + \lambda z \quad (4.1.1)$$

şeklinde göz önüne alınır. Bunun nedeni (4.1.1) denkleminin

$$z = \lambda^{-1} {}^5t \quad , \quad w = \lambda^{2/5} y \quad (4.1.2)$$

döntüşümü ile PI denklemine indirgenmesidir. Bu yüzden belirtelim ki Painlevé denklemleri, *parametre* içeren denklemelerdir. Bu denklemler aynı zamanda otonom olmayan denklemledir.

Painlevé denklemlerinin çözümlerine *Painlevé fonksiyonları* ya da *Painlevé transendantları* deniyor ise de Painlevé denklemlerine de Painlevé transendantları denilmektedir.

PI denkleminin, Painlevé denklemleri arasında en basit formda olmasına rağmen, bilinen klasik transendantlar cinsinden ifade edilebilen hiçbir özel çözüm yoktur. PI'in çözümleri yeni transendant fonksiyonlar tanımlamaktadır.

Parametrelerin özel değerleri için PII,...,PVI denklemleri rasyonel çözümlere sahiptir ve aşağıda belirtilen klasik transendant fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilen *bir* parametrelî çözüm ailesi kabul ederler (Sachdev 1991, Ablowitz ve Clarkson 1992) ;

PII : Airy Fonksiyonları

PIII : Bessel Fonksiyonları

PIV : Weber-Hermite Fonksiyonları

PV : Whittaker Fonksiyonları

PVI : Hipergeometrik Fonksiyonlar

Painlevé denklemleri hakkında pek çok sayıda çeşitli açılardan çalışma yapılmıştır ve yapılmaktadır. Bu denklemlerin çeşitli yaklaşımlar bakımından incelenmesi henüz

tamamlanabilmiş değildir. Bu alanda yapılan çalışmalar ve çalışma yapanlar o kadar çoktur ki, kaynaklarda büyük çapta *yazarlar indeksi* bulunmaktadır. Bunların büyük çoğunluğunun ifade ettiği üzere bu alan, 21. asırda da önemli araştırma ve çalışmaların ağırlıklı konusu olacaktır.

Painlevé denklemleri her ne kadar başlangıçta tamamen matematiksel düşünceler sonucu ortaya konduysa da bu denklemler son yıllarda önemini büyük ölçüde hissetirmiş bulunmaktadır. Painlevé denklemleriyle çeşitli tabiat olayları arasında çok önemli ilişkiler bulunmakla birlikte, Painlevé denklemleriyle kısmi türevli denklemler arasında da ilişkiler kurulmuş bulunmaktadır. Bunun yanı sıra Painlevé denklemleri 1970'lerden başlayan ve günümüze kadar devam eden çalışmalarla çok sayıda yeni fiziksel uygulamalarda da karşımıza çıkmaktadır (Steeb ve Euler 1988, Sachdev 1991, Ablowitz ve Clarkson 1992).

4.2. Painlevé Denklemlerinin Rasyonel Çözümleri

Lineer olmayan evrim denklemleri üzerindeki son çalışmalar gösterdi ki, ters saçılım tipindeki denklemlerin birçoğunu rasyonel çözümleri vardır. P-türündeki denklemler ve bunların ters saçılım yöntemiyle çözülebilenleri arasındaki ilişki, klasik Painlevé Transandantları için rasyonel çözümlerin bulunabileceğini öne sürer. Bu durumun bir sonucu bu bölümde gösterilecektir. Ayrıca, P_2 ve P_3 denklemleri bir rasyonel çözüme sahip olacak şekilde, sabitlerin alabileceği bütün değerler belirlendi. P_2 denkleminde olduğu gibi P_3 denklemi için de bir Bäcklund dönüşümünün var olduğu tahmin edilmektedir. Bununla birlikte benzer bir Bäcklund dönüşümü için, benzer bir metodun bulunması kolay değildir. P_4 denklemi için bir Bäcklund dönüşümü inşa edilmiştir. Böylece, bu dönüşüm sonsuz sayıda rasyonel çözümün elde edilmesine imkan vermiştir. P_5 denklemi iki Riccati denklemi içeren bir sisteme indirgenmiştir. Yine P_5 denklemi parametrelerin özel değerleri için, P_3 denkleminin bir özel haline indirgenebilir. Bu sayede P_5 denklemının bir özel çözümü elde edilebilecektir.

4.2.1. Korteweg-de Vries (KdV) ve Modifiye Korteweg-de Vries (mKdV) denklemelerinin benzerlik çözümleri

$$6u_t = 3uu_x - \frac{1}{2}u_{xxx} \quad (4.2.1.1)$$

şeklindeki KdV denklemini ele alalım. Burada $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ dir. Kabul edelim ki

$$z = xt^{-\frac{1}{3}} \quad \text{ve} \quad u(x, t) = t^{-\frac{2}{3}}h(z) \quad (4.2.1.2)$$

olsun. Bu durumda h fonksiyonu;

$$h''' = 8h + 4zh' + 6hh' \quad (4.2.1.3)$$

denklemının bir çözümüdür ($h' = \frac{dh}{dz}$).

θ_d , derecesi $\frac{d(d+1)}{2}$ olan bir polinom olmak üzere (4.2.1.1) denkleminin rasyonel çözümleri

$$u_d(x, t) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \theta_d(x, t) \quad (4.2.1.4)$$

şeklindedir. $\theta_d(x, t) = x^p \Pi_i (x^3 - \alpha_i t)$ olduğunda, $\theta_d(z)$, $\theta_d(z) = z^p \Pi_i (z^3 - \alpha_i)$ olarak tanımlanabilir. Bu durumda

$$h_d(z) = -2 \frac{d^2}{dz^2} \log \theta_d(z) \quad (4.2.1.5)$$

fonksiyonları (4.2.1.3) ün çözümleridir. Örneğin $d=2$ için

$$u_2(x,t) = \frac{6x(x^3 - 2t)}{(x^3 + t)^2} \quad \text{ve} \quad h_2(z) = \frac{6z(z^3 - 2)}{(z^3 + 1)^2}$$

şeklindedir. Şimdi

$$6v_t = 3v^2 v_x - \frac{1}{2} v_{xxx} \quad (4.2.1.6)$$

mKdV denklemini ele alalım. v , (4.2.1.6) denkleminin bir çözümü ve

$$v(x,t) = t^{-\frac{1}{3}} y(z) \quad (4.2.1.7)$$

olsun. Bu durumda y fonksiyonu;

$$y'' = 2y^3 + 4zy + \delta \quad (4.2.1.8)$$

denkleminin bir çözümüdür. Burada δ bir integrasyon sabitidir. v , (4.2.1.6) denkleminin bir çözümü olmak üzere, u fonksiyonu $u = v_x + v^2$ şeklinde tanımlanırsa u , (4.2.1.1) denkleminin bir çözümüdür. Dahası eğer v , (4.2.1.7) şeklinde ise bu durumda u da (4.2.1.2) formundadır. İkinci Painleve denklemi ;

$$y'' = 2y^3 + zy + \delta \quad (4.2.1.9)$$

(4.2.1.8) denkleminden, bir değişken değiştirmesiyle veya daha önceki metod ile

$$3v_t = 6v^2 v_x - v_{xxx} \quad (4.2.1.10)$$

denkleminden elde edilir. (4.2.1.10), zaman değişkeni değiştirildiğinde (4.2.1.6) denklemine döner.

4.2.2. P_2 denkleminin çözümleri

2. Painlevé denklemi;

$$y'' = 2y^3 + zy + \delta \quad (4.2.2.1)$$

şeklindedir. (4.2.2.1) de δ nin $-\delta$ ya dönüşmesi durumu , y nin $-y$ e dönmesi durumuna karşılık gelir. Aynı zamanda $\delta = 1$ için $y(z) = -\frac{1}{z}$, $\delta = -2$ için de $y(z) = -\frac{1}{z} + \frac{3z^2}{z^3 + 4}$ (4.2.2.1) denkleminin bir çözümüdür.

Lemma 4.2.2.1:

$$w = y'^2 - 2\delta y - y^4 - zy^2, \quad u = \exp \int w dz, \quad v = uy$$

$$2w_1 = w + y, \quad 2w_2 = w - y, \quad u_1 = \exp \int w_1 dz, \quad u_2 = \exp \int w_2 dz$$

olsun. (4.2.2.1) denkleminin çözümünün genel şekli , u_1 ve u_2 ,

$$v = u'_1 u_2 - u'_2 u_1 \quad ve \quad u = u_1 u_2$$

olacak şekildeki fonksiyonlar olmak üzere;

$$y = \frac{u'_1}{u_1} - \frac{u'_2}{u_2} = \frac{v}{u} \quad (4.2.2.2)$$

şeklindedir. u ve v fonksiyonları tamdır ve

$$\left\{ \begin{array}{l} uu'' - u'^2 + v^2 = 0 \\ (u'v - uv')^2 = v^4 + zv^2u^2 + (2\delta v + u')u^3 \end{array} \right. \quad (4.2.2.3)$$

$$\quad (4.2.2.4)$$

sistemini sağlarlar.

Lemma 4.2.2.2: u_1 ve u_2 fonksiyonları;

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u''_2}{u_2} + \frac{u''_1}{u_1} = 2 \frac{u'_1}{u_1} \frac{u'_2}{u_2} \\ u''_1 u_2 - u''_2 u_1 + 3(u'_1 u''_2 - u'_2 u''_1) = z(u'_1 u_2 - u'_2 u_1) + \delta u_1 u_2 \end{array} \right. \quad (4.2.2.5)$$

$$u''_1 u_2 - u''_2 u_1 + 3(u'_1 u''_2 - u'_2 u''_1) = z(u'_1 u_2 - u'_2 u_1) + \delta u_1 u_2 \quad (4.2.2.6)$$

sistemi sağlar.

İspat: (4.2.2.5) ilişkisi (4.2.2.3) den elde edilir ve (4.2.2.6) da (4.2.2.5) i kullanarak, (4.2.2.2) nin (4.2.2.1) in bir çözümü olması gereğinden elde edilir.

u_1 ve u_2 , Schrödinger operatörünün özfonksiyonları arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

Lemma 4.2.2.3: u_1 ve u_2 iki tam fonksiyon ve $\gamma = \frac{u_1}{u_2}$ olsun. Bu durumda u_1 ve u_2 ,

(4.2.2.5) denklemini ancak ve ancak

$$\frac{\gamma''}{\gamma} = -2 \frac{d^2}{dz^2} \log u_2 \quad (4.2.2.7)$$

ise sağlar. İspat $\gamma''/\gamma = (\gamma'/\gamma)' + (\gamma'/\gamma)^2$ kullanılarak gösterilebilir.

Lemma 4.2.2.4: $\lambda = \frac{u'_2}{u_2}$ ve y , Lemma 4.2.2.1 deki gibi olsun. Bu durumda (y, λ) ,

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + y^2 = -2\lambda' \\ (4\lambda' - z)y = 2\lambda'' + \delta \end{array} \right. \quad (4.2.2.8)$$

$$(4.2.2.9)$$

sistemi sağlar. Tersine olarak eğer (y, λ) , (4.2.2.8)-(4.2.2.9) sisteminin bir çözümü ise bu durumda y , (4.2.2.1) denkleminin bir çözümüdür.

İspat: (4.2.2.8), (4.2.2.7) den çıkar. (4.2.2.9) u elde etmek için (4.2.2.8) diferensiyellenip (4.2.2.1) kullanılır. Tersi için (4.2.2.8) diferensiyellenerek (4.2.2.9) kullanılır.

Örnekler:

1. $\lambda=1/z$ alalım. (4.2.2.9) dan $y(z) = -\frac{(4+\delta z^3)}{z(4+z^3)}$ elde edilir. δ için iki olasılık vardır;

$$\delta = 1 \text{ veya } \delta = -2.$$

2. $\lambda'(z) = \frac{z}{4}$ alalım. Bu durumda $y' + y^2 = -\frac{z}{2}$ dir ve $y, \delta = -\frac{z}{2}$ olmak üzere

(4.2.2.1) denkleminin bir çözümüdür.

Bu örnekleri δ nin bir tamsayı ya da yarıyı tamsayı olma durumuna genelleştirmeliyiz.

Uyarı 4.2.2.1: $\mu = \frac{u'_1}{u_1}$ ve y , Lemma 4.2.2.1 deki gibi olsun. Bu durumda

$$\begin{cases} -y' + y^2 = -2\mu' \\ (4\mu' - z)y = -2\mu'' + \delta \end{cases} \quad (4.2.2.10)$$

$$(4.2.2.11)$$

elde edilir.

Uyarı 4.2.2.2: y_1 ve y_2

$$y'_1 + y_1^2 = -y'_2 + y_2^2 = -2\lambda' \quad (4.2.2.12)$$

olacak şekildeki fonksiyonlar olsunlar. Kabul edelim ki

$$\mu_1 = \frac{u'_1}{u_1} \quad \text{ve} \quad \mu_2 = \frac{u'_2}{u_2}$$

olmak üzere

$$y_1 = \mu_1 - \lambda \quad \text{ve} \quad y_2 = \lambda - \mu_2$$

olsun. $\lambda = \frac{u'}{u}$ alalım. Bu durumda (4.2.2.12) ;

$$\frac{y'_1 + y'_2}{y_1 + y_2} = y_2 - y_1 = 2\lambda - \mu_1 - \mu_2 \quad (4.2.2.13)$$

ifadesine denktir. (4.2.2.13) tür integrasyonu, K bir sabit olmak üzere;

$$u'_1 u_2 - u_1 u'_2 = Ku^2 \quad (4.2.2.14)$$

sonucunu verir.

$\gamma_1 = \frac{u_1}{u}$ ve $\gamma_2 = \frac{u_2}{u}$ nun, $\frac{\gamma''}{\gamma} = -2 \frac{d^2}{dz^2} \log u$ nun iki özdeğeri olduğuna dikkat edelim. (4.2.2.14) ifadesi Wronskiyanın sabit olduğunu ve

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \int \frac{K}{\gamma_2^2}$$

olduğu gerçeğini açıklar.

Kabul edelim ki $\delta = \delta_1$ için y_1 , (4.2.2.1) denkleminin bir çözümü ve $\delta = \delta_2$ için de y_2 (4.2.2.1) in bir çözümü olsun. Lemma 4 ten;

$$\mu_1 = \lambda + \frac{2\lambda'' + \delta_1}{4\lambda' - z}$$

ve

$$\mu_2 = \lambda + \frac{2\lambda'' - \delta_2}{4\lambda' - z}$$

şeklindedir. Buradan;

$$\mu_1 - \mu_2 = \frac{\delta_1 + \delta_2}{4\lambda' - z} = \frac{Ku^2}{u_1 u_2} \quad (4.2.2.15)$$

Bu, c bir sabit olmak üzere u_1, u_2 tam fonksiyonlarının

$$u_1 u_2 = c(4\lambda' - z)u^2 \quad (4.2.2.16)$$

formülünü sağladığını ispatlar.

P_2 denklemi için bir Bäcklund dönüşümü aşağıdaki şekilde elde edilir;

Theorem 4.2.2.1: $\delta = \delta_0$ olmak üzere (y, λ) , (4.2.2.8)-(4.2.2.9) sisteminin bir çözümü olsun. $\mu = \lambda + y$ alalım ve $4\mu' - z \neq 0$ ise

$$\bar{y} = \frac{2\mu'' + \delta}{4\mu' - z}$$

(Bäcklund dönüşümü) olsun. Bu durumda (\bar{y}, μ) , $\delta = \delta_0 - 1$ veya $\delta = -\delta_0$ için (4.2.2.8)-(4.2.2.9) sisteminin bir çözümüdür.

İspat: $\bar{y}' + \bar{y}^2 = -2\mu'$ olup olmadığına bakmak yeterlidir. Bu amaçla μ, μ' ve μ'' nü z ve y cinsinden hesaplayalım.

$$\mu' = \frac{1}{2}(y' - y^2)$$

ve (4.2.2.1) den

$$\mu'' = -yy' + \frac{zy}{2} + y^3 + \frac{\delta_0}{2}$$

ve

$$\mu''' = -y'^2 - 2y^4 - zy^2 - \delta_0 y + \frac{y}{2} + \frac{zy'}{2} + 3y^2 y'$$

elde edilir. Bu ifadeler,

$$\frac{2\mu'''(4\mu' - z) - (2\mu'' + \delta)(2\mu'' - 1 - \delta)}{(4\mu' - z)^2} = -2\mu'$$

denkleminde yerlerine yazılırsa her şey sadeleşir ve bu δ için $\delta = \delta_0 - 1$ ve $\delta = -\delta_0$ olasılıklarını ortaya çıkarır.

Şimdi (4.2.2.1) denkleminin rasyonel çözümlerine bakalım. Eğer u_2 bir polinom ise (4.2.2.9) dan y bir rasyonel fonksiyon ve u_1 de bir polinomdur.

Lemma 4.2.2.5: u_1 ve u_2 nin birer polinom olduğunu kabul edelim. $d_1 = \deg u_1$, $d_2 = \deg u_2$ olsun. Bu durumda (4.2.2.5), n tam sayı olmak üzere $d_1 = \frac{n(n+1)}{2}$ ve $d_2 = \frac{n(n-1)}{2}$ olduğunu gösterir.

İspat: (4.2.2.5) de daha yüksek dereceden terimleri karşılaştırdığımız zaman $d_2(d_2 - 1) + d_1(d_1 - 1) = 2d_1d_2$ elde edilir. Bu denklem, d_2 için çözütlürse diskriminant; $\Delta = 8d_1 + 1$ dir. Δ , sadece n bir tam sayı ve $d_1 = \frac{n(n+1)}{2}$ ise bir tam karedir.

Uyarı: Lemma 4.2.2.5 in ispatında $d_1 = d_2$ durumunun söz konusu olamayacağını görmek kolaydır.

Lemma 4.2.2.6: (4.2.2.1) denkleminin sıfırdan farklı bir rasyonel çözümü varsa, bu durumda δ , sıfırdan farklı bir tam sayıdır.

İspat: $d_1 = \deg u_1$, $d_2 = \deg u_2$ olsun. (4.2.2.6) da daha yüksek dereceden terimleri alırsak $\delta = d_1 - d_2$ buluruz.

Teorem 4.2.2.2: (4.2.2.1) denkleminin bir rasyonel çözüme sahip olması δ nin bir tam sayı olması durumuna eşdeğerdir. $\delta = 0$ ise bu durum aşikardır. Bunun dışında $\delta = n$ için bu çözüm;

$$y_n = -\frac{u'_n}{u_n} + \frac{u'_{n-1}}{u_{n-1}} \quad (4.2.2.17)$$

ile verilir. Burada u_n , C keyfi bir sabit olmak üzere

$$u_{n+1}u_{n-1} = C(2q_n + z)u_n^2 \quad (4.2.2.18)$$

ile hesaplanır ve

$$u_0 = 1, \quad u_1(z) = z, \dots \quad (4.2.2.19)$$

için

$$q_n = -2 \frac{d^2}{dz^2} \log u_n \quad (4.2.2.20)$$

dir. $\delta = -n$ için, $y_{-n} = -y_n$ dir.

İspat: Lemma 4.2.2.6 dan (4.2.2.1) rasyonel çözümlere sahip ise δ bir tamsayıdır. Tersine olarak δ tamsayıların bir dizisini gösterdiğinde, Teorem 4.2.2.1 i kullanarak rasyonel çözümler oluşturabiliriz. (4.2.2.18) indirgeme bağıntısı (4.2.2.16) nin böyle bir dizisidir.

Uyarı: $\lambda = \frac{u'}{u}$ ve $d=\deg u$ alalım. Bu durumda Lemma 4.2.2.4,

$y \approx -\frac{\delta}{z}$ ve $y' + y^2 \approx \frac{\delta + \delta^2}{z^2}$ olduğunu gösterir. Fakat $-2\lambda' \approx \frac{2d}{z^2}$ dir. $d=n(n+1)/2$

olduğunda Lemma 4.2.2.5 ten $\delta + \delta^2 = n(n+1)$ denklemi $\delta = n$ ve $\delta = -(n+1)$ özdeğerlerini verir.

Uyarı: (4.2.2.18) de $\frac{u'}{u_n}$, y_n ve q_n cinsinden ifade edildikçe, C sabitinin değerini her hesaplama için değiştirebiliriz.

Şimdi (4.2.2.1) denkleminin başka çözümler sınıfını ele alalım. A;

$$y' + y^2 = -\frac{z}{2} \quad (4.2.2.21)$$

denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda $\delta = -\frac{1}{2}$ olduğunda A, (4.2.2.1) denkleminin bir çözümüdür.

$$\frac{u'_0}{u_0} = \frac{z^2}{8} \quad \text{için} \quad A' + A^2 = -2 \frac{d^2}{dz^2} \log u_0$$

ve

$$\frac{u'_1}{u_1} = \frac{z^2}{8} + A \quad \text{için} \quad A = \frac{u'_1}{u_1} - \frac{u'_0}{u_0}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.2.3: n bir tamsayı olmak üzere $\delta = n + \frac{1}{2}$ ise (4.2.2.1) denklemi Airy fonksiyonunun bir rasyonel fonksiyonu olan bir çözüme sahiptir ve bu çözüm türevlenebilirdir. Bu çözümler aşağıdaki gibi hesaplanır;

$$\delta = -\frac{1}{2} \quad \text{için} \quad y_0 = A$$

$$\delta = -\frac{1}{2} + n \quad \text{için} \quad y_n = \frac{u'_{n-1}}{u_{n-1}} - \frac{u'_n}{u_n}$$

$$\delta = \frac{1}{2} - n \quad \text{için} \quad y_{-(n-1)} = -y_n$$

u_n fonksiyonları (4.2.2.18)-(4.2.2.19) formülleriyle hesaplanır ve

$$u_0(z) = \exp \frac{z^3}{24}, \quad u_1 = \gamma u_0, \dots \quad (4.2.2.22)$$

dir. Burada $\gamma'' = -\frac{z}{2}\gamma$ ve $A = \frac{\gamma'}{\gamma}$ dir. Hatta q_n fonksiyonları,

$$q''' = 2q + zq' + 6qq' \quad (4.2.2.23)$$

Korteweg-de Vries denkleminin benzerlik çözümleridir.

İspat: Teorem 4.2.2.1 ve (4.2.2.16) formülü kullanılır. İlk çözümlerin hesaplamaları (4.2.2.18), (4.2.2.20), (4.2.2.22) den ;

$$u_2 = A' \gamma^2 u_0 \quad , \quad u_3 = A'' \gamma^3 u_0 \quad (4.2.2.24)$$

$$u_4(z) = (-8zA'^2 + 16AA' + 3)\gamma^4 u_0$$

şeklinde bulunur.

q fonksiyonu için;

$$q_1(z) = \frac{z}{2} + 2A^2 \quad (4.2.2.25)$$

$$q_2(z) = -\frac{z}{2} - \frac{A''}{A'^2} = -\frac{z}{2} + \frac{2}{(z+2A^2)^2} - \frac{4A}{z+2A^2} \quad (4.2.2.26)$$

$$q_3(z) = -\frac{z}{2} + 6A' + 8\frac{A'^4}{A''^2} + 8\frac{AA'^2}{A''} \quad (4.2.2.27)$$

elde edilir. Hesaplamalarda

$$A' + A^2 = -\frac{z}{2} \quad , \quad A'' + 2AA' = -\frac{1}{2}$$

$$A''' + 2A'^2 + 2AA'' = 0$$

kullanılabilir. (4.2.2.1) denklemının çözümlerinin ,

$$\delta = -\frac{3}{2} \quad \text{için} \quad y = -A + \frac{1}{z+2A^2} \quad (4.2.2.28)$$

$$\delta = -\frac{5}{2} \quad \text{için} \quad y = A - \frac{1}{z+2A^2} - \frac{(z+2A^2)^2}{2A(z+2A^2)-1} \quad (4.2.2.29)$$

olduğu bulunur.

4.2.3. P_2 için elde edilen sonuçların daha yüksek basamaktan denklemler için genişletilmesi

Yerel analizde, ispat edildi ki bazı yüksek basamaktan K-dV denklemlerinin benzerlik çözümleri, P -özeliğine sahip olması için gerekli koşulları sağlar. Bu kesimde, Kesim 4.2.2 de elde edilen sonuçların daha yüksek basamaktan denklemlere nasıl genişletileceği üzerinde durulacaktır.

$$L_u \text{ operatörü } (D = \frac{d}{dx}) ;$$

$$L_u = 2(u + DuD^{-1}) - D^2 \quad (4.2.3.1)$$

olsun. Aşağıdaki akıllar dizisini ele alalım;

$$X_1 u = Du = D \frac{\partial H_1}{\partial u} \quad (4.2.3.2)$$

$$X_m u = Lu X_{m-1} u = D \frac{\partial H_m}{\partial u}, \quad m = 2, 3, \dots \quad (4.2.3.3)$$

Bu durumda;

$$X_2 u = 6uu_x - u_{xx} \quad (4.2.3.4)$$

elde edilir.

$$z = xt^{-1/(2m-1)} \text{ olmak üzere, } u(x, t) = t^{-2/(2m-1)} q(z);$$

$$(2m-1)u_t = X_m u$$

denkleminin bir çözümü olsun. q fonksiyonu, L_q ve $X_m q$ (4.2.3.1)-(4.2.3.3) deki gibi tanımlanmak üzere,

$$X_m q + 2q + q'z = 0 \quad (4.2.3.5)$$

diferensiyel denklemini sağlar.

Eğer $q = y' + y^2$ ise S_y operatörünü

$$S_y = 4y^2 + 4y'D^{-1}y - D^2 \quad (4.2.3.6)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$(2y + D)S_y = L_q(2y + D) \quad (4.2.3.7)$$

ve

$$X_m q = (2y + D)S_y^{m-1}(y') \quad (4.2.3.8)$$

elde edilir. Kesim 4.2.2 de Lemma 4.2.2.4 kolayca bu duruma döner.

Lemma 4.2.3.1:

$$\begin{cases} y' + y^2 = q \\ y\left(2\frac{\partial H_{m-1}}{\partial q} + z\right) + \delta = X_{m-1}q \end{cases} \quad (4.2.3.9) \quad (4.2.3.10)$$

sistemi

$$D^{-1}S_y^{m-1}(y') + zy + \delta = 0 \quad (4.2.3.11)$$

denklemine eşdeğerdir. Eğer y , (4.2.3.9)-(4.2.3.10) sisteminin bir çözümü ise q , (4.2.3.5) denklemini sağlar.

İspat: (4.2.3.9)-(4.2.3.10) sisteminin (4.2.3.11) denklemine eşdeğer olduğunu göstermek için (4.2.3.8) denklemini kullanarak, (4.2.3.10) denkleminde q yok edilir.

Şimdi y , (4.2.3.11) denkleminin bir çözümü olsun. (4.2.3.8) denklemi ile $X_m q$ hesaplanıp (4.2.3.5) elde edilir.

(4.2.3.9)-(4.2.3.10) sistemi için bir Bäcklund dönüşümü şimdi oluşturulabilir:

Teorem 4.2.3.1: $\delta = \delta_0 - 1$, $r = q - 2y'$ ve $2\frac{\partial H_{m-1}}{\partial r} + z \neq 0$ için (y, q) ; (4.2.3.9)-

(4.2.3.10) sisteminin bir çözümü olsun.

$$\hat{y} = \frac{X_{m-1}r - \delta}{2\frac{\partial H_{m-1}}{\partial r} + z} \quad (4.2.3.12)$$

alalım. Bu durumda $\delta = \delta_0$ ve $\delta = \delta_0 - 1$ için (\hat{y}, r) ; (4.2.3.9)-(4.2.3.10) sisteminin bir çözümüdür.

İspat: $-y' + y^2 = r \quad (4.2.3.13)$

dir. Eğer y , δ_0 sabiti için (4.2.3.11) denkleminin bir çözümü ise bu durumda $-y$ de $-\delta_0$ için bir çözümüdür. Buradan

$$X_{m-1}r = -y(2\frac{\partial H_{m-1}}{\partial r} + z) - \delta_0 \quad (4.2.3.14)$$

elde edilir.

$$N = X_{m-1}r - \delta \quad \text{ve} \quad M = 2\frac{\partial H_{m-1}}{\partial r} + z$$

olsun. Bu durumda $\frac{d}{dz}$ olmak üzere

$$\hat{y} = \frac{N}{M} \quad , \quad M' = 2N + 2\delta + 1$$

ve (4.2.3.14) denkleminden;

$$N = -yM - \delta_0 - \delta$$

şeklindedir. Böylece $M' = -2yM - 2\delta_0 + 1$ dir. $\hat{y}' + \hat{y}^2 = -y' + y^2$ nin ispatı şimdi kolaydır. δ için iki değer verilir; $\delta = -\delta_0$ ve $\delta = \delta_0 - 1$.

Örnek (m=3 durumu) : Modifiye KdV denkleminden (20) deki şemayla elde edilen denklem;

$$5v_t + v_{xxxx} - 10v^2v_{xx} - 10v_x^3 - 40vv_xv_{xx} + 30v^4v_x = 0 \quad (4.2.3.15)$$

denklemidir. $u = v_x + v^2$ fonksiyonu

$$5u_t = -u_{xxxx} + 20u_xu_{xx} + 10uu_{xx} - 30u^2u_x \quad (4.2.3.16)$$

denkleminin bir çözümüdür.

$v, v(x, t) = t^{-1/5}y(z)$, $z = xt^{-1/5}$ olmak üzere, (4.2.3.15) denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda y ,

$$y^{(4)} = zy + 10y^2y'' + 10yy'^2 - 6y^5 + \delta \quad (4.2.3.17)$$

denkleminin bir çözümüdür.

Lemma 4.2.3.2: (4.2.3.17) denklemi;

$$\begin{cases} y' + y^2 = q \\ y(z - 6q^2 + 2q'') = -6qq' + q''' - \delta \end{cases} \quad (4.2.3.18)$$

$$(4.2.3.19)$$

sistemine eşdeğerdır.

Lemma 4.2.3.3: q ;

$$q'' = 3q^2 - \frac{z}{2} \quad (4.2.2.20)$$

P_1 denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda $u(x, t) = t^{-2/5}q(z)$ (4.2.3.16) denkleminin bir çözümüdür. Dahası Bäcklund dönüştümü , y , (4.2.3.18) denkleminin bir çözümü olsak üzere , (4.2.3.17) nin y ve q ya göre rasyonel çözümlerini verir.

4.2.4 P_4 denklemi için bir Bäcklund dönüşümü

P_4 denklemi

$$y'' = \frac{y'^2}{2y} + \frac{3}{2}y^3 + 4zy^2 + 2(z^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y} \quad (4.2.4.1)$$

şeklindedir.

Lemma 4.2.4.1: c bir integrasyon sabiti olmak üzere (4.2.4.1) denklemi aşağıdaki sisteme eşdeğerdir;

$$\begin{cases} y'' = 2w + 2y^3 + 6zy^2 + 4(z^2 - \alpha)y + c \\ w' = -(y^2 + 2zy) \end{cases} \quad (4.2.4.2)$$

$$(4.2.4.3)$$

İspat: $t^2 = y$ olsun. Bu durumda (4.2.4.1) denklemi ;

$$2tt'' = \frac{3}{2}t^6 + 4zt^4 + 2(z^2 - \alpha)t^2 + \frac{\beta}{t^2} \quad (4.2.4.4)$$

denklemine eşdeğerdir. Bu denklem de t ye bölünüp t' ile çarpılacak olursa;

$$2t't'' = \frac{3}{2}t^5t' + 4zt^3t' + 2(z^2 - \alpha)tt' + \frac{\beta}{t^3}t' \quad (4.2.4.5)$$

denklemi elde edilir. w, (4.2.4.3) de tanımlandığı gibi olmak üzere (4.2.4.5) integre edilecek olursa;

$$t'^2 = \frac{1}{4}t^6 + zt^4 + (z^2 - \alpha)t^2 + w - \frac{\beta}{2t^2} + \frac{c}{2} \quad (4.2.4.6)$$

denklemi elde edilir. $(t^2)'' = 2t'^2 + 2tt''$ kullanılarak ve t^2 yerine (4.2.4.6) denklemindeki y yazılırsa (4.2.4.2) elde edilir.

Tersine (y, w) 'nin (4.2.4.2)-(4.2.4.3) sisteminin bir çözümü olduğunu kabul edelim.

(4.2.4.2), y' ile çarpılır ve (4.2.4.3) kullanılarak integre edilirse

$$y'^2 = y^4 + 4zy^3 + 4wy + 4(z^2 - \alpha)y^2 + 2cy - 2\beta \quad (4.2.4.7)$$

elde edilir.

$$\frac{y'^2}{2y} + \frac{3}{2}y^3 + 4zy^2 - 2(z^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y} \quad (4.2.4.8)$$

ifadesi hesaplandığında (4.2.4.8)'in (4.2.4.2) de olduğu gibi y'' ne eşit olduğu bulunur.

Bu da y nin (4.2.4.1) denklemının bir çözümü olduğunu ispatlar.

Uyarı: (4.2.4.2)-(4.2.4.3) sistemi

$$\begin{cases} y'^2 = w'^2 + 4(w - \alpha y)y + 2cy - 2\beta \\ w' = -(y^2 + 2zy) \end{cases} \quad (4.2.4.9)$$

$$(4.2.4.3)$$

sistemine eşdeğerdir.

İspat: (4.2.4.9) denklemi (4.2.4.7) den elde edilir.

Lemma 4.2.4.2: (4.2.4.2)-(4.2.4.3) sistemi $y = \mu - \lambda$ olmak üzere

$$\begin{cases} y' + y^2 + 2zy = -2\lambda' \\ (\lambda' + \alpha - 1)y = \frac{\lambda''}{2} + \lambda - \lambda'z \end{cases} \quad (4.2.4.10)$$

$$\quad (4.2.4.11)$$

sistemine eşdeğerdir.

İspat : (y, λ) nin (4.2.4.10)-(4.2.4.11) sistemini sağladığını kabul edelim.

$w = y + 2\lambda - c$ olsun. (4.2.4.10) , (4.2.4.3) ü verir. (4.2.4.10) diferensiyellenip, (4.2.4.11) kullanılırsa (4.2.4.2) elde edilir.

Tersine olarak $-2\lambda' = y' + y^2 + 2zy$ alalım. Buradan (4.2.4.3), $w = y + 2\lambda - c$ olduğunu gösterir. (4.2.4.10) diferensiyellenir ve y'' yerine (4.2.4.2) deki ifadesi yazılır, tekrar diferensiyellenir ve (4.2.4.10) kullanılarak y^2 yok edilirse,

$$y'(1 - \alpha - \lambda') - y\lambda'' = \lambda''z - \frac{\lambda''}{2} \quad (4.2.4.12)$$

elde edilir. (4.2.4.12) denkleminin integrali (4.2.4.11) i verir.

Lemma 4.2.4.3: (4.2.4.2)-(4.2.4.3) sistemi $y = \mu - \lambda$ olmak üzere

$$\begin{cases} -y' + y^2 + 2zy = -2\mu' \\ (\mu' + \alpha + 1)y = -\frac{\mu''}{2} + \mu - \mu'z \end{cases} \quad (4.2.4.13)$$

$$\begin{cases} -y' + y^2 + 2zy = -2\mu' \\ (\mu' + \alpha + 1)y = -\frac{\mu''}{2} + \mu - \mu'z \end{cases} \quad (4.2.4.14)$$

sistemine eşdeğerdir.

İspat: Lemma 4.2.4.3'ün ispatı Lemma 4.2.4.2'nin ispatına benzerdir.

Lemma 4.2.4.4: (4.2.4.10)-(4.2.4.11) sistemi;

$$\begin{cases} y' + y^2 + 2zy = -2\lambda' \\ (2\lambda - \lambda'' - 2\lambda'z)y = 2\lambda'^2 + \beta \end{cases} \quad (4.2.4.15)$$

$$\begin{cases} y' + y^2 + 2zy = -2\lambda' \\ (2\lambda - \lambda'' - 2\lambda'z)y = 2\lambda'^2 + \beta \end{cases} \quad (4.2.4.16)$$

sistemine eşdeğerdir.

İspat: (4.2.4.10) diferensiyellenir, (4.2.4.1) ve (4.2.4.10) kullanılarak y'' ve y' yok edilir. Daha sonra (4.2.4.11) kullanılarak (4.2.4.16) elde edilir. (4.2.4.1) kullanılarak ispatın tersi de gösterilebilir.

Sonuç: λ fonksiyonu;

$$-2\left(\frac{\lambda''}{2} + \lambda - \lambda'z\right)\left(\frac{\lambda''}{2} - \lambda + \lambda'z\right) = (2\lambda'^2\beta)(\lambda' + \alpha - 1) \quad (4.2.4.17)$$

denkleminin bir çözümüdür.

Uyarı 4.2.4.1: (4.2.4.17) denkleminde, λ nin;

$$4\lambda'(\alpha - 1) + 6\lambda'^2 + \beta = -\lambda''' + 4z(\lambda'z - \lambda) \quad (4.2.4.18)$$

denklemini sağlaması gerektiği bulunur.

Uyarı 4.2.4.2: $c; -\frac{\beta}{2} = (2c + \alpha - 1)^2$ olacak şekilde bir sabit olsun. Eğer λ , (4.2.4.17)

denkleminin bir çözümü ise $\mu = \lambda - cz$ de, (4.2.4.17) denkleminin bir çözümüdür.

Bir Bäcklund dönüşümü aşağıdaki gibi elde edilir;

Teorem 4.2.4.1: $\alpha = \alpha_0$ olmak üzere y , (4.2.4.1) denkleminin bir çözümü olsun. λ ve y (4.2.4.10)-(4.2.4.11) sistemindeki gibi olmak üzere $y = \mu - \lambda$ olsun. Bu durumda $\mu' + \alpha_0 + 1 \neq 0$ ise $\alpha = \alpha_0 + 2$ olduğu zaman;

$$\hat{y} = -y + \frac{2(\mu - \mu'z)}{\mu' + \alpha_0 + 1} \quad (4.2.4.19)$$

ile verilen \hat{y} da, (4.2.4.1) denkleminin bir çözümüdür.

İspat: Lemma 4.2.4.3' ten

$$-y = \frac{\mu''/2 - \mu + \mu'z}{\mu' + \alpha_0 + 1} = \lambda - \mu \text{ ve } \hat{y} = \frac{\mu''/2 + \mu - \mu'z}{\mu' + \alpha_0 + 1} = \gamma - \mu$$

elde edilir. Lemma 4.2.4.2 den dolayı $\hat{y}' + \hat{y}^2 + 2z\hat{y} = -2\mu'$ olduğunu göstermek yeterlidir ve son aşama da kolaydır.

Ciz. 4.2.4.1: P_4 denkleminin rasyonel çözümleri

α	β	λ	y
-2	-2	$z + \frac{1}{z}$	$-\frac{1}{z}$
-1	$-\frac{8}{9}$	$\frac{4}{27}z^3 + \frac{1}{z} + \frac{2}{3}$	$-\frac{1}{z} - \frac{2}{3}z$
-1	-8	$2z$	$\frac{1}{z} - 2z$
0	$-\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}z^3 + \frac{1}{3}z$	$-\frac{2}{3}z$
1	-8	$\frac{1}{z}$	$-2z - \frac{1}{z}$
1	$-\frac{8}{9}$	$\frac{4}{27}z^3$	$\frac{1}{z} - \frac{2}{3}z$
1	$-\frac{32}{9}$	$\frac{4}{27}z^3 + \frac{1}{z}$	(4.2.4.11)
2	-2	$-z$	$\frac{1}{z}$
2	$-\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}z^3 - \frac{1}{z}$	(4.2.4.11)

Örnek: Tablo 4.2.4.1 deki y fonksiyonlarının (4.2.4.1) denkleminin çözümleri olduğu kontrol edilebilir.

Teorem 4.2.4.1 deki Bäcklund dönüşümü kullanılarak da $y = \frac{1}{z} - \frac{2}{3}z$ ($\alpha = 1, \beta = -\frac{8}{9}$) çözümünden, $\alpha = 3$ olduğunda (4.2.4.1) denkleminin bir çözümü hesaplanabilir.

$y = \mu - \frac{4}{27}z^3$ olduğunu biliyoruz. Buradan μ ve $\mu' = \frac{4}{9}z^2 - \frac{1}{z^2} - \frac{2}{3}$ elde edilir.

(4.2.4.19) dan $\alpha = 3$ ve $\beta = -\frac{8}{9}$ olduğunda (4.2.4.1) denkleminin bir çözümü

$$y = -\frac{1}{z} + \frac{2}{3}z + \frac{108z - 16z^5}{12z^4 + 36z^2 - 27} \quad (4.2.4.20)$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi kabul edelimki,

$$y' + y^2 + 2zy = 2(\alpha - 1) \quad (4.2.4.21)$$

olsun. $\beta = -2(\alpha - 1)^2$ olduğunda (4.2.4.21) denkleminin herhangi bir çözümü, (4.2.4.1) denkleminin bir çözümüdür.

y, (4.2.4.21) denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda (4.2.4.19) dan $\tilde{\alpha} = \alpha + 2$ ve $\tilde{\beta} = -2(\tilde{\alpha} - 3)^2$ için;

$$\hat{y} = -y + \frac{2(y - y'z)}{y' + 2} \quad (4.2.4.22)$$

(4.2.4.1) denkleminin bir çözümüdür.

Uyarı: $\alpha = -n$ olduğunda H_n' ler n. basamaktan Hermite Polinomları olmak üzere

$y = -2z + \frac{H_n'}{H_n}$, (4.2.4.21) denkleminin bir çözümüdür. Benzer olarak $\alpha = n$ ise

(4.2.4.21) denkleminin rasyonel çözümleri elde edilir. Örneğin $\alpha = 2$ için $y = \frac{1}{z}$ ve

$\alpha = -1$ için $y = \frac{1}{z} - 2z$ elde edilir.

4.2.5. P_3 denklemının çözümleri

P_3 denklemi;

$$y'' = \frac{y'^2}{2y} - \frac{y'}{z} + \frac{1}{z}(\alpha y^2 + \beta) + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y} \quad (4.2.5.1)$$

şeklindedir. Belirtelim ki eğer y (4.2.5.1) denkleminin bir çözümü ise bu durumda $1/y$ de sabitler değiştiğinde bir çözümüdür.

u_1 ve u_2 , tam fonksiyonlar olmak üzere $y = \frac{u_1}{u_2}$ formundaki çözümlere bakacak

olursak (4.2.5.1) denklemi aşağıdaki sisteme eşdeğerdir;

$$\left(\frac{u'_2}{u_2} \right)' = -\frac{1}{z} \frac{u'_2}{u_2} - \frac{\alpha}{z} \frac{u_1}{u_2} - \gamma \frac{u_1^2}{u_2^2} \quad (4.2.5.2)$$

$$\left(\frac{u'_1}{u_1} \right)' = -\frac{1}{z} \frac{u'_1}{u_1} + \frac{\beta}{z} \frac{u_2}{u_1} + \delta \frac{u_2^2}{u_1^2} \quad (4.2.5.3)$$

Lemma 4.2.5.1: u_1 ve u_2 nin iki polinom ve $\alpha \neq 0$ ya da $\gamma \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\delta = \beta = 0$ ve $\deg u_1 < \deg u_2$ dir.

İspat: $d_2 = \deg u_2$ olsun. Bu durumda z sonsuza giderken

$$\frac{u'_2}{u_2} = \frac{d_2}{z} + O\left(\frac{1}{z}\right) \text{ ve } \left(\frac{u'_2}{u_2} \right)' + \frac{1}{z} \frac{u'_2}{u_2}$$

$O\left(\frac{1}{z^2}\right)$ ye benzer olarak sıfıra gider. (4.2.5.2) denkleminden $\frac{\alpha}{z} \frac{u_1}{u_2} + \gamma \frac{u_1^2}{u_2^2}$ ifadesi sıfıra gider. Eğer $\alpha \neq 0$ ya da $\gamma \neq 0$ ise bu durumda $\deg u_1 < \deg u_2$ dir. (4.2.5.3) kullanılarak $\beta = \delta = 0$ sonucu elde edilir.

Teorem 4.2.5.1: $\beta = \delta = 0$ olsun. Bu durumda (4.2.5.1) denklemi iki çözüm ailesine sahiptir;

$$\beta = -\frac{\alpha}{\lambda^2} \quad \text{ve} \quad 4AD = \frac{\alpha^2}{\lambda^4} - \frac{\gamma}{\lambda^2} \quad \text{için} \quad y(z) = \frac{z^{\lambda-1}}{Az^{2\lambda} + Bz^\lambda + D} \quad (4.2.5.4)$$

ve

$$2a = \alpha \quad \text{ve} \quad b^2 - 4ad = \gamma \quad \text{için} \quad y(z) = \frac{1}{z(a \log^2 z + b \log z + d)} \quad (4.2.5.5)$$

Ispat: $z = e^x$ ve $y = e^z$ olsun. $\psi = g + x$ alalım. Bu durumda (4.2.5.1) denklemi,

$$\psi'' = \alpha e^\psi + \gamma e^{2\psi} \quad (4.2.5.6)$$

denklemine eşdeğerdir. (4.2.5.6) ψ' ile çarpılır ve integre edilirse, c bir integrasyon sabiti olmak üzere;

$$\psi'^2 = 2\alpha e^\psi + \gamma e^{2\psi} + 2c \quad (4.2.5.7)$$

elde edilir. $u = e^{-\psi}$ alalım. Buradan $u' = -\psi'u$ ve (4.2.5.7) denkleminden

$$u'^2 = 2\alpha u + \gamma + 2cu^2 \quad (4.2.5.8)$$

elde edilir. (4.2.5.8) integre edilirse $c \neq 0$ için (4.2.5.4), $c = 0$ için de (4.2.5.5) elde edilir.

Her ne kadar P_3 denklemının Bäcklund dönüşümünün oluşturulmasında başarılı olunamasa da, P_3 denklemi aşağıdaki Riccati denklem sistemlerine indirgenebilmiştir:

Lemma 4.2.5.2: (4.2.5.1) denklemi aşağıdaki sistemlerden herhangi birine eşdeğerdir:

Sistem 1:

$$\begin{cases} y' + \frac{ay}{z} + cy^2 = g \\ y[zg' + (1+a)g - \beta] = z(\delta + g^2) \end{cases} \quad (4.2.5.9)$$

$$(4.2.5.10)$$

Burada $\gamma = c^2$ ve $\alpha = (a-1)c$ dir.

Sistem 2:

$$\begin{cases} y' = \frac{ay}{z} + cy^2 + g \\ c' = -c^2 y + \gamma y + \frac{\alpha}{z} - \frac{(a+1)}{z} c \end{cases} \quad (4.2.5.11)$$

$$(4.2.5.12)$$

Burada $\beta = g(1-a)$ ve $\delta = -g^2$ dir.

Sistem 3:

$$\begin{cases} y' = cy^2 + g \\ g' = \frac{g^2}{y} - \frac{g}{z} + \frac{\beta}{z} + \frac{\delta}{y} \end{cases} \quad (4.2.5.13)$$

$$(4.2.5.14)$$

$$\begin{cases} c' = -c^2 y - \frac{c}{z} + \frac{\alpha}{z} + \gamma y \end{cases} \quad (4.2.5.15)$$

İspat: Herbir durumda sistemin ilk denkleminin türevi alınır ve (4.2.5.1) denkleminde yerine konur.

Uyarı: v_1 ve v_2 $v'_1 = gv_2$ ve $v'_2 = -cv_1$ olacak şekilde iki fonksiyon olsunlar. Bu

durumda $y = \frac{v_1}{v_2}$, (4.2.5.13) denkleminin bir çözümüdür.

$g = \frac{v'_1}{v_1}$ ve $c = -\frac{v'_2}{v_2} - \frac{1}{y}$ kullanılarak (4.2.5.14) ve (4.2.5.15) denklemleri aşağıdaki

denklemlere dönüştürler:

$$\left\{ \begin{pmatrix} v'_1 \\ v_1 \end{pmatrix}' = \frac{v'_1 v'_2}{v_1 v_2} - \frac{1}{z} \frac{v'_1}{v_1} + \frac{\beta}{z} \frac{v_2}{v_1} + \delta \frac{v_2^2}{v_1^2} \right. \quad (4.2.5.16)$$

$$\left. \begin{pmatrix} v'_2 \\ v_2 \end{pmatrix}' = -\frac{v'_1 v'_2}{v_1 v_2} + \frac{1}{z} \frac{v'_2}{v_2} + \frac{\alpha}{z} \frac{v_1}{v_2} + \gamma \frac{v_1^2}{v_2^2} \right. \quad (4.2.5.17)$$

(4.2.5.16) ile (4.2.5.17) toplanır ve (4.2.5.1) denklemi elde edilir.

4.2.6. P_s denkleminin P_3 denklemine indirgenmesi

P_s denklemi;

$$y'' = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1} \right) y'^2 - \frac{1}{z} y' + \frac{(y-1)^2}{z^2} \left(\alpha y + \frac{\beta}{y} \right) + \gamma \frac{y}{z} + \delta \frac{y(y+1)}{y-1} \quad (4.2.6.1)$$

şeklindedir. Bu denklem $\alpha = \frac{a^2}{2}$ ve $\beta = -\frac{b^2}{2}$ olmak üzere

$$\begin{cases} y' = ty + \frac{(ay+b)(y-1)}{z} \end{cases} \quad (4.2.6.2)$$

$$\begin{cases} t' = \frac{y+1}{y-1} \left(\frac{t^2}{2} + \delta \right) + \frac{\gamma - t(l-a-b)}{z} \end{cases} \quad (4.2.6.3)$$

sistemine eşdeğerdir.

t bir sabit olmak üzere $\delta = -\frac{t^2}{2}$ ve $\gamma = t(l-a-b)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$y' = ty + \frac{(y-1)(ay+b)}{z} \quad (4.2.6.4)$$

denkleminin çözümleri, (4.2.6.1) denkleminin çözümleridir.

(4.2.6.2)-(4.2.6.3) sisteminde y yerine $\frac{w+1}{w-1}$ alınacak olursa;

$$\begin{cases} w' = -\frac{t}{2}w^2 + \frac{t}{2} - \frac{(a+b)w + a - b}{z} \\ t' = w(\frac{t^2}{2} + \delta) + \frac{\gamma}{z} - \frac{t}{z}(1-a-b) \end{cases} \quad (4.2.6.5)$$

$$w' = -\frac{t}{2}w^2 + \frac{t}{2} - \frac{(a+b)w + a - b}{z} \quad (4.2.6.6)$$

sistemi elde edilir.

$\delta = \gamma = 0$ olduğunda P_5 denklemi, P_3 denkleminin özel bir haline indirgenebilir.

Lemma 4.2.6: Y, P_3 denkleminin bir çözümü olsun.

$$Y'' = \frac{Y'^2}{Y} - \frac{Y'}{Z} + \frac{(b-a)}{z} Y^2 + Y^3 \quad (4.2.6.7)$$

ve $c=a+b-1$ olmak üzere $w = \frac{Y' - cY/z}{Y^2}$ alalım. Bu durumda $y = \frac{w+1}{w-1}$ fonksiyonu, $\delta = \gamma = 0$ ve $\beta = -\frac{b^2}{2}, \alpha = \frac{a^2}{2}$ olduğunda P_5 denkleminin bir çözümüdür. Bununla beraber $y, t=2Y$ olduğunda (4.2.6.4) denkleminin bir özel çözümüdür.

İspat: $t=2Y$ ve $\delta = \gamma = 0$ ve $c=a+b-1$ alalım. Bu durumda

$$\begin{cases} w' = -Yw^2 + Y + \frac{(b-a)-(c+1)w}{z} \\ Y' = wY^2 + \frac{cY}{z} \end{cases} \quad (4.2.6.8)$$

$$\begin{cases} w' = -Yw^2 + Y + \frac{(b-a)-(c+1)w}{z} \\ Y' = wY^2 + \frac{cY}{z} \end{cases} \quad (4.2.6.9)$$

sistemi elde edilir. Bu sistem (4.2.6.7) denklemine eşdeğerdir. $w, (4.2.6.9)$ ile hesaplanır.

Örnek:

$$Y = \frac{z^{2-\lambda}}{z^{2\lambda} - \frac{1}{4\lambda^2}}$$

fonksiyonu

$$Y'' = \frac{Y'^2}{Y} - \frac{Y'}{z} + Y^3$$

denkleminin bir çözümüdür.

$$y(z) = \frac{(\lambda+2)z^{2\lambda} - z^\lambda + (\lambda-2)/4\lambda^2}{(\lambda+2)z^{2\lambda} + z^\lambda + (\lambda-2)/4\lambda^2} \quad (4.2.6.10)$$

fonksiyonunun, (4.2.6.1) denkleminin ve

$$y' = \frac{2z^{2\lambda-1}}{z^{2\lambda} - 1/4\lambda^2} y + \frac{y^2 - 1}{z}$$

denkleminin bir çözümü olduğu sonucu elde edilir.

(4.2.60.1) denklemi önceki dönüşüm yoluyla P_3 denkleminin çözümlerinden gelmeyen rasyonel çözümlere sahiptir. Örneğin $y(z) = \frac{1}{z}$.

KAYNAKLAR

- Ablowitz, M.J. and Clarkson, P.A. 1992. Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. University Press, Cambridge.
- Ablowitz, M.J., Ramani, A. and Segur, H. 1978. Nonlinear Evolution Equations and Ordinary Differential Equations of Painlevé Type. Lett. Nuovo Cimento 23, pp. 333-338.
- Ablowitz, M.J., Ramani, A. and Segur, H. 1980. A Connection Between Nonlinear Evolution Equations and Ordinary Differential Equations of Painlevé Type. I.J. Math. Phys. 21, pp. 715-721.
- Airault, H. 1979. Rational Solutions of Painlevé Equations. Studies in Appl. Math. 61, pp. 31-53.
- Anasov, D.V. and Arnold, V.I. 1990. Dynamical Systems I. Springer-Verlag, Berlin.
- Davis, H.T. 1962. Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations. Dover Publications, Inc., New York.
- Fokas, A.S. and Yortsos, Y.C. 1981. The Transformation Properties of the Sixth Painlevé Equation and One-Parameter Families of Solutions. Lett. Nuovo Cimento 30, pp. 539-544.
- Hille, E. 1969. Lectures on Ordinary Differential Equations. Addisonwesley Publishing Co., Reading, Massachusetts.
- Hille, E. 1976. Ordinary Differential Equations in the Complex Domain. John Wiley and Sons, New York.
- Ince, E.L. 1956. Ordinary Differential Equations. Dover Publications, Inc., New York.
- Iwasaki, K., Kimura, H., Shimomura, S. and Yoshida, M. 1991. From Gauss to Painlevé. Friedr, Vieweg and John, Braunschweig.
- Lane, I. 1992. Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations. Walter de Gruyter, Berlin.
- Rainville, E.D. 1965. Special Functions. The Macmillan Company, New York.
- Sachdev, P.L. 1991. Nonlinear Ordinary Differential Equations and Their Applications. Marcel Dekker, Inc., New York.
- Steeb, W.H. and Euler, N. 1988. Nonlinear Evolution Equations and Painlevé Test. World Scientific Publishing Co., Singapore.
- Yıldız, S. 1998. Polinom Sınıflarından Diferensiyel Denklemler ve Painlevé Transendantları. A.Ü. Fen Bil. Ens. Yüksek Lisans Tezi, Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

Antakya'da 1978 yılında doğdu. İlk, orta, lise öğrenimini Antakya'da tamamladı. 1995 yılında girdiği Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1999 yılında mezun oldu.

Temmuz 1999'da Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans sınavını kazandı. Lisansüstü derslerine devam ederken Mart 2000'de Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nce açılan araştırma görevliliği sınavını kazandı. Halen aynı bölümde bu görevine devam etmektedir.